

José Renato Ramos Barbosa

Perda de Validade de Trajetórias Caóticas Numéricas a Partir do Limiar da Variabilidade de Dimensão Instável

Tese apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Curitiba

2004

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**



PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa Tese de Doutorado do estudante **José Renato Ramos Barbosa**, são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Tese cujo título é **Perda de validade de trajetórias caóticas numéricas a partir do limiar da variabilidade de dimensão instável**.

Curitiba, 6 de abril de 2004.

Prof. RICARDO LUIZ VIANA
(Orientador/Presidente) (UFPR)

Prof. CELSO GREBOGI
(USP)

Prof. JASON ALFREDO CARLSON GALLAS
(UFPRGS)

Prof. SÉRGIO ROBERTO LOPES
(UFPR)

Prof. MARCOS GOMES E. DA LUZ
(UFPR)

Dedicado a Minha Mãe e a Minha Filha.

Agradecimentos

- Ao Orientador Professor Ricardo Luiz Viana;
- Ao Professor Celso Grebogi da USP;
- Ao Professor Carlos Carvalho, Administrador da Rede Linux do Curso de Física da UFPR;
- Aos Colegas do Departamento de Matemática da UFPR;
- Aos Colegas do Grupo de Caos e Dinâmica Não Linear da UFPR;
- A Pós-graduação em Física da UFPR.

“Quem exagera nos argumentos prejudica a causa.”

—Hegel

Resumo

Trajetórias numéricas que modelam um sistema físico de alta dimensionalidade são confiáveis por pouco tempo se existe hiper-caos destruindo fortemente a hiperbolicidade do sistema dinâmico via a Variabilidade de Dimensão Instável (VDI): a existência de órbitas periódicas mergulhadas num conjunto invariante caótico com um número diferente de direções instáveis. Uma indicação numérica para a ocorrência da VDI é a flutuação em torno de zero dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, como podemos verificar, por exemplo, para o mapa do rotor duplo pulsado, um sistema físico 4-dimensional no qual a VDI é mais intensa em torno do seu parâmetro de controle igual a 8. Contudo, pouco se tem dito a respeito do limiar (*onset*) da VDI. Aqui a abordagem é conseguir a bifurcação que acarreta a VDI para determinadas famílias a um parâmetro de mapas bidimensionais, bem como, considerando o mapa do rotor duplo pulsado, verificar que o caos unidimensional pode ser o gatilho para a VDI.

Abstract

Numerical trajectories that model a high dimensional physical system are valid only for small times if there is hyperchaos strongly destroying the hyperbolicity of the dynamical system via the Unstable Dimension Variability (UDV): the existence of periodic orbits embedded in a chaotic invariant set with different numbers of unstable directions. A numerical clue for UDV is the fluctuation of positive finite-time Lyapunov exponents about zero as one can verify, for instance, to the kicked double rotor map, a 4-dimensional physical system in which UDV is the most intense to its control parameter about 8. However, very few has been told on the UDV onset. Our approach is to get the bifurcation that leads to the UDV to some one-parameter families of bidimensional maps, as well as, as far as the kicked double rotor map is concerned, verify that a one-dimensional chaos can be a trigger for UDV.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	6
1.1 Visão Geral da Tese	6
1.1.1 Motivação	8
1.1.2 Objetivos	9
1.1.3 Enfoque Adotado	10
1.2 Perguntas e Respostas	11
2 Rotor Duplo Pulsado	13
2.1 Descrição do Mapa do Rotor Duplo Pulsado	13
2.2 Derivação do Mapa do Rotor Duplo Pulsado	15
2.3 Pontos Fixos	20
2.3.1 Cálculo dos Pontos Fixos	21
3 Hiperbolicidade, Sombreamento e Variabilidade de Dimensão Instável	24
3.1 Algumas Propriedades Matemáticas de Conjuntos Hiperbólicos	26
3.2 Falha na Hiperbolicidade	28
3.3 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito	30
3.3.1 Propriedades dos $\lambda_k(\mathbf{x}_0; n)$	32
3.3.2 Cálculo Numérico dos $\lambda_k(n)$	35
4 Variabilidade de Dimensão Instável para o Mapa do Rotor Duplo Pulsado	37
4.1 Teoria da Variedade Central e o Mapa do Rotor Duplo Pulsado	38

4.1.1	Dinâmica sobre a Variedade Central	42
4.2	Expoentes de Lyapunov Locais e o Mapa do Rotor Duplo Pulsado	47
4.2.1	Distribuições dos $\lambda_2(n)$	47
4.2.2	Variância	47
4.2.3	Médias	48
4.2.4	Fração dos $\lambda_2(n)$ Positivos	50
4.3	Tempo de Sombreamento	52
5	Variabilidade de Dimensão Instável e Bifurcações de Co-dimensão 1 para Mapas Bidimensionais	56
5.1	Bifurcações com Um Autovalor igual a +1	59
5.1.1	Bifurcação Forquilha	59
5.1.2	Bifurcação Transcrítica	61
5.1.3	Bifurcação Tangente	63
5.2	Bifurcação com Um Autovalor igual a -1	64
6	Limiar da Variabilidade de Dimensão Instável para o Mapa do Rotor Duplo Pulsado	67
7	Conclusões	71
7.1	Perspectivas de Trabalhos Futuros	72

Lista de Figuras

2.1	Rotor Duplo Pulsado	14
3.1	Dada uma trajetória perturbada (com ruído) com condição inicial \mathbf{x}_0 , é possível obter outra condição inicial \mathbf{x}'_0 da qual parte uma trajetória verdadeira (sem ruído) que evolui próxima da órbita perturbada que parte de \mathbf{x}_0	27
3.2	Iteração da condição inicial (5,5,5,7,0,0,0,0) para o MRDP em precisões simples e dupla, divergindo exponencialmente a partir da décima oitava iteração. Aqui, $f_0 = 7,5$	29
3.3	Tangência Homoclínica entre Variedades Estável e Instável de um Ponto Fixo (de Sela).	29
3.4	Crise de Identidade: Uma órbita típica (do conjunto invariante) ao passar nas vizinhanças de pontos como P e Q acima, não sabe se fica com uma ou duas direções instáveis.	30
3.5	Distribuição de probabilidade $P(\lambda_2, 15)$ para o segundo expoente de Lyapunov a tempo 15, considerando o MRDP para $f_0 = 8,0$. Seguindo o algoritmo numérico dado no final desta seção, a figura foi obtida a partir de 1000 condições iniciais geradas de forma aleatória. Para cada uma destas, após um transiente acima de 6000 iteradas, calculamos os $\lambda_2(15)$ 10000 vezes ao longo da trajetória.	31
3.6	Distribuição de probabilidade $P(\lambda_2, 10)$ dos $\lambda_2(10)$ para o mapa de Ikeda com parâmetros de regime caótico. Note que parece existir uma barreira para os $\lambda_2(10)$ próximos de zero.	34
4.1	Gráfico de s_2 dependendo de f_0	38

4.2	Diagrama de Bifurcação para $f_0 \in [4,0, 6,0]$. Para cada um dos 8000 valores de f_0 considerados, iteramos cada uma das 500 condições iniciais consideradas, desconsiderando transientes correspondentes a mais de 6000 iteradas. .	39
4.3	Diagrama de Bifurcação para $f_0 \in [6,0, 8,0]$. Para cada um dos 8000 valores de f_0 considerados, iteramos cada uma das 500 condições iniciais consideradas, desconsiderando transientes correspondentes a mais de 6000 iteradas. .	40
4.4	Algumas distribuições de probabilidade relativas aos $\lambda_2(10)$ para o MRDP obtidas para diferentes valores de f_0 . Cada distribuição foi gerada a partir de valores nas mesmas ordens de grandeza daqueles utilizados para gerar a figura 3.5.	48
4.5	Variância relativa aos $\lambda_2(10)$ para o MRDP em função de f_0 . Tal diagrama reflete as distorções das distribuições para $\lambda_2(10)$ no intervalo entre (aproximadamente) -1 e 1 da figura 4.4.	49
4.6	Médias dos expoentes de Lyapunov a tempo 10 para o MRDP em função de f_0 . $\langle \lambda_2(10) \rangle$ cruza 0 a uma taxa constante na vizinhança da transição para o hiper-caos.	50
4.7	Expoentes de Lyapunov a tempo infinito para o MRDP em função de f_0 . Figura obtida por Lai, Grebogi e Kurths em [12].	50
4.8	Fração dos $\lambda_2(10)$ positivos para o MRDP em função de f_0 . A transição para o hiper-caos é identificada com a fração positiva de metade dos $\lambda_2(10)$. Na figura 4.4, para tal valor, a distribuição é simétrica a, e com máximo na, reta $\lambda_2(10) = 0$. O limiar para a VDI ($f_0 \simeq 6,8$) não coincide com o do hiper-caos.	51
4.9	$\log \langle \tau \rangle$ em função de f_0 . A figura (b) é uma ampliação da figura (a) para $f_0 \in [7,5, 8,5]$	53
5.1	Pseudo-órbitas que visitam vizinhanças (suficientemente pequenas) dos repulsores caem numa armadilha ao entrarem em “línguas” (ancoradas nos repulsores) e divergem para o infinito.	58
5.2	(a)Bifurcação forquilha supercrítica; (b)subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).	60
5.3	Distribuição de probabilidade dos expoentes de Lyapunov transversais a tempo 25, $P(\lambda_y, 25)$, para o mapa riddling com $a = 4,0$, $b = 5,0$, e (a) $r = 1,0$; (b) $r = 1,75$; (c) $r = 2,55$	61
5.4	(a)Bifurcação transcítica supercrítica; (b)subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).	62

5.5	Distribuição de probabilidade $P(\lambda_y, 15)$ para os expoentes de Lyapunov transversais a tempo 15 para o mapa $(x, y) \mapsto (2x \pmod{2\pi}, (y + \mu y - y^2) \cos x)$ para $\mu = 0,1, \mu = 0,5$ e $\mu = 1,0$	63
5.6	(a)Bifurcação tangente supercrítica; (b)subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).	64
5.7	Cascata de duplicações de período para o mapa logístico.	65
5.8	$P(\lambda_y, 15)$ é a distribuição de probabilidade dos expoentes de Lyapunov a tempo 15 para o mapa $(x, y) \mapsto (2x \pmod{2\pi}, (-y - \mu y + y^3)(\cos x))$ para $\mu = 0,1, \mu = 0,5$ e $\mu = 1,0$	66
6.1	Autovalores da jacobiana do MRDP para $\mathbf{P}_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)$ com $f_0 \in [6, 7, 7, 0]$	69

Capítulo 1

Introdução

Nesta introdução é dada, de uma forma bastante resumida, uma visão geral da tese. Alguns conceitos, definições e resultados que são aqui citados serão estabelecidos e formalizados somente nos próximos capítulos, aparecendo aqui apenas como um adiantamento para que possa ser esboçada uma visão geral do trabalho. Isto significa que todo o conteúdo desta introdução está carregado de um forte abuso de linguagem e de notação, tendo um caráter mais explanatório e não apresentando as idéias com muito rigor, tendo como objetivo uma discussão mais qualitativa. Contudo, iniciaremos esta introdução, de uma maneira informal, com um tópico que não será explicitamente tratado nos capítulos restantes: Modelagem.

1.1 Visão Geral da Tese

Podemos modelar um sistema físico num sistema dinâmico, isto é, numa equação diferencial ordinária (aqui denotada por EDO) ou num mapa (este associado a uma fórmula de recorrência), de um dos seguintes tipos: **determinístico**, **estatístico** ou **pseudo-determinístico**.

Num modelo determinístico as informações (para entendimento, análise, predições e controle do sistema) são obtidas via a evolução temporal das variáveis (de estado) físicas relevantes a partir de equações (EDOs ou mapas) adequadas. Num modelo estatístico as informações são obtidas via processos estocásticos devido a muitos graus de liberdade ou a ruídos aleatórios. Num modelo pseudo-determinístico são obtidas informações estatísticas a partir de equações determinísticas.

Em face destas definições (informais), é razoável fazer as seguintes perguntas:

- Para modelos pseudo-determinísticos, qual é a extensão da validade das predições base-

adas em equações determinísticas?¹

- Quando obtemos soluções numéricas (com sensibilidade às condições iniciais intrínseca devido a erros de arredondamento ou truncamento), até qual iterada estas são válidas?

Para quantificar a extensão de tais validades, temos o *Sombreamento de Modelos*. As referências [1], [2], [3] e [4] contêm uma abordagem cuidadosa deste assunto. Tal teoria será dada agora informalmente, como dito anteriormente, com abuso de linguagem e de notação. No capítulo 3 estabeleceremos algumas definições matemáticas sobre este assunto, bem como o **lema do sombreamento** (ver [1]), formalizando assim tal conceito.

Considere que temos dois modelos arbitrariamente próximos, obtidos a partir de um sistema físico. Por exemplo, considere as seguintes duas EDOs obtidas a partir da modelagem de um determinado sistema físico:

$$\begin{cases} A: \dot{X} = F(X, t) \\ B: \dot{X} = F(X, t) + \varepsilon(t) \end{cases} ,$$

tal que $\varepsilon(t)$ é uma perturbação infinitesimal mas limitada. (Embora a variável tempo t , neste caso, seja contínua, ao longo de todo o trabalho restringiremos o estudo a sistemas dinâmicos discretos (mapas)).

Se para cada solução X_A satisfazendo A , existir alguma solução X_B satisfazendo B tal que X_A “se mantém próxima” de X_B , é dito que existe *sombreamento* de X_A por X_B .

No capítulo 3 formalizaremos o “estar próximo” deste conceito, bem como a idéia de que, sem sombreamento, A e B não podem reproduzir ou prever o sistema físico que as mesmas modelam.

Ainda mantendo em mente que esta introdução expõe idéias sem o rigor necessário, temos que, as dificuldades de sombreamento podem ser leves, moderadas ou severas, onde cada uma destas pode ser caracterizada da seguinte maneira:

LEVES: Temos um Sistema Caótico Hiperbólico. (Daremos a definição de conjunto hiperbólico no capítulo 3). Neste caso X_A “sombreia” X_B para $t \rightarrow \infty$ (ver [1], [2], [3] e [4]).

MODERADAS: Temos um Sistema Caótico com Não-Hiperbolicidade Fraca: a decomposição do espaço de fase (espaço de estados) em subespaços estáveis (nestes, as órbitas convergem para soluções de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$) e instáveis (nestes,

¹Por exemplo, para sistemas caóticos com Sensibilidade às Condições Iniciais.

as órbitas divergem de soluções de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$) é invariante, exceto em tangências homoclínicas. (Daremos a definição de tangências homoclínicas no capítulo 3). Neste caso X_A “sombreia” X_B para $0 \ll t < \infty$ (ver [5], [6], [7] e [8]).

SEVERAS: Temos um Sistema Caótico com Não-Hiperbolicidade Forte: existem órbitas periódicas mergulhadas no conjunto caótico que experimentam um número diferente de direções instáveis. A isto damos o nome de Variabilidade de Dimensão Instável (VDI). Neste caso X_A “sombreia” X_B para $\infty > t$ “pequeno” (ver [4], [9], [10], [11] e [12]).

A teoria matemática de sombreamento também pode ser aplicada as órbitas resultantes de simulações numéricas a partir de um modelo. Aqui, é importante observar que:

Se existir VDI as órbitas numéricas são confiáveis por pouco tempo!

Vamos discutir tal ponto, com um pouco mais de formalização, a partir do capítulo 3. Por enquanto, o utilizaremos como uma maneira de situar historicamente o que foi estabelecido até agora e, a partir daí, descrever alguns objetivos deste trabalho.

1.1.1 Motivação

Se considerarmos um sistema dinâmico discreto e iterarmos uma trajetória numérica (dita **pseudo-trajetória**) a partir de uma condição inicial, erros numéricos (ou algum outro tipo de ruído) podem acarretar que, a partir de alguma iterada, a pseudo-órbita não seja mais a trajetória originária daquela condição inicialmente tomada. Por volta dos anos setenta, o matemático russo D. V. Anosov e o matemático americano R. Bowen demonstraram que mapas caóticos hiperbólicos exibem a bem conhecida propriedade de **sombreamento**: próxima a tal pseudo-trajetória, existe uma trajetória verdadeira (fiducial) gerada pelo sistema e que, contudo, pode ser uma órbita que se origina de uma condição inicial diferente daquela pretendida. (Ver, por exemplo, [1] e [2]). Além disso, o tempo de sombreamento é infinito (ver [1], [2], [3] e [4]). Tal pseudo-órbita é confiável, no sentido de que a mesma pode reproduzir a dinâmica do sistema. Na verdade, noções tais como pseudo-trajetórias e sombreamento podem ser bem sucedidas se aplicadas a problemas de predição (ver [13]) envolvendo estados futuros de um sistema dinâmico.

Na década de oitenta, um grupo de físicos-matemáticos (C. Grebogi, J. Yorke, T. Sauer, dentre outros) demonstraram que quando a hiperbolicidade é violada devido apenas a

tangências homoclínicas, embora o tempo de sombreamento seja longo o suficiente para se obter resultados determinísticos confiáveis sobre o sistema, o mesmo é finito (ver [5], [6], [7] e [8]).

Nos anos noventa, C. Grebogi, S. Dawson, J. Kurths, Y.-C. Lai, dentre outros, verificaram que o tempo de sombreamento é muito pequeno, sendo suficiente, e apenas para alguns sistemas, para se obter resultados estatísticos como médias e flutuações, quando uma forma forte de não-hiperbolicidade (VDI) ocorre: a existência de órbitas periódicas com um número diferente de direções instáveis, densamente (no sentido topológico) mergulhadas num conjunto invariante caótico (ver [4], [9], [10], [11] e [12]). Quando a VDI é muito intensa, as pseudo-trajetórias são de pouca (ou nenhuma) utilidade para que se possa confiar em predições baseadas nas mesmas.

A VDI primeiramente surgiu em um trabalho matemático teórico do eminente topólogo (medalhista Fields-1966-Moscou) S. Smale em conjunto com o matemático R. Abraham (ver [9]).

1.1.2 Objetivos

Podemos dizer, informalmente, que os expoentes de Lyapunov a tempo n medem (como será visto no capítulo 3) a convergência ou a divergência entre órbitas a cada trecho de n pontos consecutivos, pela dinâmica do sistema, de uma destas órbitas. A flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo n mais próximos de zero em torno do próprio zero, vistos como variáveis aleatórias, tem sido usada como uma indicação numérica da ocorrência de VDI (ver, por exemplo, [4], [10], [11] e [14]), mostrando assim um relacionamento próximo entre VDI e expoentes de Lyapunov.² Considerando tal relacionamento, tem sido argumentado que VDI é uma possível rota para o caos multidimensional³ (ver [15]). Contudo, veremos que tal rota só faz sentido se considerarmos a VDI onde a mesma for máxima, isto é, quando o número dos expoentes de Lyapunov a tempo finito mais próximos de zero que são positivos é igual ao número dos que são negativos. Inclusive, tomando o mapa do rotor

²O teste da flutuação em torno de zero dos expoentes de Lyapunov a tempo finito para se detectar VDI tem sido usado de modo similar ao teste da derivada nula para se detectar máximos e mínimos. Contudo, é possível que não se obtenha nem máximos nem mínimos num ponto de derivada nula. A ocorrência da VDI implica na flutuação em torno de zero dos expoentes de Lyapunov a tempo finito. Não se sabe (ainda) se a recíproca é verdadeira. Uma das questões que discutiremos aqui é se o teste dos expoentes de Lyapunov é uma condição necessária e suficiente para a ocorrência de VDI.

³Caos multidimensional ou hiper-caos significa que existe mais de um expoente de Lyapunov a tempo infinito positivo.

duplo pulsado (MRDP)⁴ como um exemplo, o aparecimento da VDI pode estar associado ao limiar (do inglês *onset*) do caos unidimensional, isto é, caos com um único expoente de Lyapunov a tempo infinito positivo.

Via argumentos matemáticos e exemplos numéricos, este trabalho propõe que alguns tipos de bifurcações podem acarretar VDI. Isto é feito para famílias a um parâmetro de mapas bidimensionais. Ainda argumentamos que VDI pode ter outro tipo de gatilho que não bifurcações: como já dito anteriormente, o limiar do caos unidimensional. Isto ocorre muito antes da VDI atingir o seu máximo. Antes de prosseguirmos vamos conceituar informalmente o que é uma bifurcação. Uma bifurcação ocorre num ponto x do espaço de estados, que descreve a dinâmica de um determinado sistema físico, se uma variação infinitesimal em algum parâmetro associado a tal sistema acarreta uma mudança qualitativa numa vizinhança de x . Por exemplo, pode ocorrer que órbitas próximas a x , antes da variação do parâmetro, tendem a se aproximar de x , e, após a variação do parâmetro, tais órbitas se afastam de x , acarretando que x passa de “estável” para “instável” via uma bifurcação. Os principais tipos de “bifurcações de co-dimensão um” serão apresentados no capítulo 5.

Outro objetivo do trabalho é examinar matematicamente o que é que acarreta a VDI máxima para o MRDP. Na literatura científica disponível (ver, por exemplo, [10] e [11]), VDI para o MRDP tem sido associada a VDI na vizinhança do parâmetro de controle onde a mesma atinge o seu máximo.

1.1.3 Enfoque Adotado

Como vamos utilizar o rotor duplo pulsado para estudar sombreamento, VDI e expoentes de Lyapunov a tempo finito, o próximo capítulo é dedicado ao estudo do mesmo. É neste capítulo 2 que a Física acontece, embora a Matemática entre na derivação do mapa e na determinação dos pontos fixos. Como já era de se esperar, por ter sido citado inúmeras vezes nesta introdução, o capítulo 3 é, possivelmente, o mais “matemático” de todos e pode ser visto como capítulo de referência. Tal capítulo “matematiza” sombreamento, VDI e expoentes de Lyapunov a tempo finito. O capítulo 4 aplica as definições e os resultados do capítulo anterior ao MRDP. Nos capítulos 5 e 6 estudamos, respectivamente, o limiar da VDI para mapas bidimensionais de co-dimensão⁵ um e para o MRDP. O capítulo 7

⁴O rotor duplo é um sistema físico composto de duas hastes interligadas de massa desprezível. Em breve estaremos estudando tal mapa (estroboscópico) que descreve a dinâmica imediatamente após cada pulso em uma das duas hastes que compõe o rotor duplo.

⁵ver a primeira página do Capítulo 4.

estabelece conclusões sobre este trabalho e indica caminhos para a continuação da pesquisa aqui iniciada.

Com relação a Matemática, em algumas poucas partes do trabalho abusamos da linguagem e das notações para não carregar demais a leitura e facilitar o entendimento. Por exemplo, quando por fim definimos o que é uma forma normal, é fácil perceber um forte abuso de linguagem. Contudo, remetemos o leitor a uma referência adequada.

1.2 Perguntas e Respostas

Por fim, antes que as perguntas “Qual é a contribuição deste trabalho?”, “O que é que existe de original neste trabalho?”, etc., se façam presentes, gostaria inicialmente de citar o que não é original: os diagramas que ilustram a sequência de duplicações de período para o MRDP do capítulo 4, o diagrama dos expoentes de Lyapunov a tempo infinito para o MRDP do capítulo 4, o diagrama das distribuições dos expoentes de Lyapunov a tempo finito referente a bifurcação forquilha do capítulo 5, o diagrama da sequência de duplicações de período relativo ao mapa logístico do capítulo 5, obviamente os resultados e teoremas citados com referências, e, embora a derivação do MRDP seja uma demonstração original, esta segue as linhas gerais do artigo do Romeiras (e colaboradores) citado na bibliografia [16]. Agora, para dar uma idéia de alguns resultados originais, resalto que, embora o uso da flutuação (em torno de zero) dos expoentes de Lyapunov a tempo finito como critério para a ocorrência de VDI seja amplamente utilizado, e que, concomitantemente, a idéia de que VDI implica tal flutuação seja bem conhecida no “folclore” da área, a demonstração analítica de tal fato só é estabelecida, até onde saibamos, neste trabalho (ver capítulo 3). Outro resultado original está relacionado com o limiar da VDI para o MRDP: obtemos (aproximadamente) para qual valor do parâmetro de controle temos, e, concomitantemente, o que é que acarreta a, VDI. Outro resultado original é a classificação do limiar da VDI para uma determinada classe de mapas bidimensionais a um parâmetro.

Para terminar este capítulo introdutório, gostaria de tentar responder a seguinte pergunta: “Quais as razões que levaram a escolha do rotor duplo pulsado como sistema físico para estudar a patologia (numérica) conhecida como VDI?”. Em muitos artigos, alguns dos quais citados na bibliografia deste trabalho (ver, por exemplo, [17]), têm sido argumentado que a ocorrência de VDI parece ser uma propriedade comum de sistemas com um grande número de graus de liberdade. Além do rotor duplo pulsado ser um sistema físico com apenas quatro graus de liberdade, e de ter sido, aparentemente, até onde saibamos, o primeiro sistema físico da literatura sobre o assunto a apresentar VDI, sistemas dinâmicos de

dimensionalidade mais baixa que apresentam tal patologia vem sendo artificialmente construídos, por exemplo, via acoplamento de mapas de dimensão um, sem conexão explícita com qualquer sistema físico.

Capítulo 2

Rotor Duplo Pulsado

Neste capítulo será apresentado o Rotor Duplo Pulsado, o seu mapa, a derivação do mesmo a partir das equações de movimento que modelam a dinâmica do rotor duplo. Também serão calculados os pontos fixos de tal mapa.

O mapa do rotor duplo é um mapa 4-dimensional (ver [16]) que descreve a evolução temporal de um sistema mecânico conhecido como o Rotor Duplo Pulsado (RDP).

2.1 Descrição do Mapa do Rotor Duplo Pulsado

No que se segue θ_1 e θ_2 (e suas derivadas) denotarão variáveis contínuas, enquanto que x_1 , x_2 , y_1 e y_2 denotarão variáveis discretas.

O RDP é composto de duas hastes finas de massa desprezível (ver figura 2.1). A primeira haste, de comprimento l_1 , pivota o ponto fixo P_1 . A segunda haste, de comprimento $2l_2$, pivota o ponto móvel P_2 . Os ângulos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ denotam as orientações das primeira e segunda hastes, respectivamente, no instante t . Uma massa m_1 é anexada a P_2 e massas $m_2/2$ são anexadas as extremidades P_3 e P_4 da segunda haste. Atrito em P_1 (com coeficiente ν_1) retarda a primeira haste numa taxa proporcional a sua velocidade angular $\dot{\theta}_1(t)$. Atrito em P_2 (com coeficiente ν_2) retarda a segunda haste (e concomitantemente, por transferência de momento, acelera a primeira haste) a uma taxa proporcional a $\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)$. A extremidade P_3 recebe pulsos periódicos nos instantes $t = T, 2T, \dots$, sempre na mesma direção e com o mesmo módulo f_0 . Não existe gravidade.

A partir das EDOs que descrevem o RDP (obtidas via equações de movimento de uma Lagrangeana adequada) temos o mapa 4-dimensional (para a derivação de tal mapa ver a seção seguinte)

$$\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{Z}' = \mathbf{F}(\mathbf{Z})$$

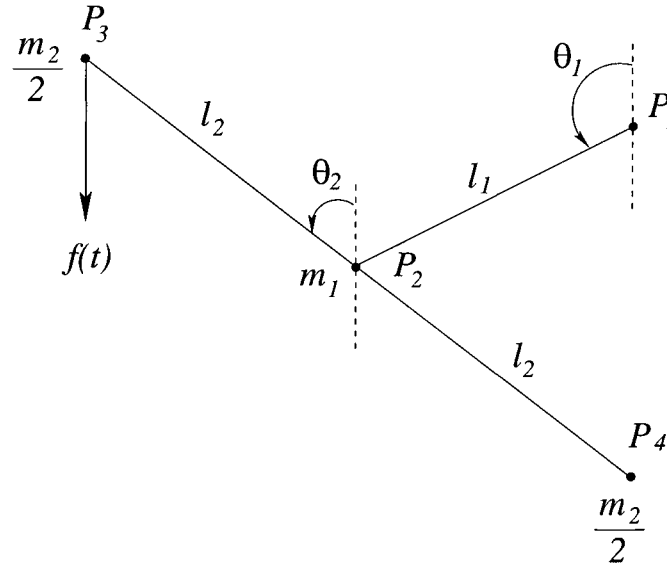


Figura 2.1: Rotor Duplo Pulsado

definido por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{Y} + \mathbf{X} \\ \mathbf{L}\mathbf{Y} + \mathbf{G}(\mathbf{X}') \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ e $\mathbf{G}(\mathbf{X}') = \begin{pmatrix} c_1 \sin x'_1 \\ c_2 \sin x'_2 \end{pmatrix}$.

Aqui, x_1 e x_2 são posições angulares das hastes no instante do k -ésimo pulso ($x_j = \theta_j(kT)$), y_1 e y_2 são as velocidades angulares das hastes imediatamente após o k -ésimo pulso ($y_j = \dot{\theta}_j(kT + \epsilon)$ com $\epsilon \rightarrow 0^+$), \mathcal{S}^1 é o círculo $\mathcal{R} \pmod{2\pi}$, para $j = 1, 2$ temos

$$c_j = f_0 l_j / I,$$

onde $I = (m_1 + m_2)l_1^2 = m_2 l_2^2$ é o momento de inércia, e, por fim, temos

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,241427724 & 0,272608938 \\ 0,272608938 & 0,514036662 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,485963338 & 0,213354401 \\ 0,213354401 & 0,699317739 \end{pmatrix}$$

para ν_1 , ν_2 , T , I , m_1 , m_2 e l_2 iguais as suas respectivas unidades de medida, e l_1 igual a $1/\sqrt{2}$ de sua unidade de medida. Apenas o parâmetro f_0 , que representa a intensidade do pulso, estará variando.

A derivação analítica do MRDP será feita sem levarmos em conta que os parâmetros físicos citados anteriormente são todos iguais a 1 e $l_1 = 1/\sqrt{2}$. Tal hipótese é feita após obtermos a expressão analítica do MRDP. Isto significa que, após a dedução do MRDP, estaremos considerando $\nu_1 = \nu_2 = T = I = m_1 = m_2 = l_2 = 1$ e $l_1 = 1/\sqrt{2}$ em todos os cálculos numéricos relativos a tal mapa.

2.2 Derivação do Mapa do Rotor Duplo Pulsado

As equações de movimento do RDP são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_j}, \quad j = 1, 2, \quad (2.1)$$

onde a função Lagrangeana L é a diferença entre a energia cinética,

$$K(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2,$$

e a energia potencial,

$$V(\theta_1, \theta_2, t) = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) f(t),$$

isto é, $L = K - V$, e a função de dissipação de Rayleigh é dada por

$$F(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2} \nu_1 I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2 I_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2.$$

A sequência dos pulsos é dada por

$$f(t) = f_0 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Das equações de (2.1) temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} \right) = I_j \frac{d}{dt} \dot{\theta}_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = -f(t) l_j (-\sin \theta_j), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_1} = \nu_1 I_1 \dot{\theta}_1 + \nu_2 I_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) (-1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_2} = \nu_2 I_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1).$$

Destas obtemos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\nu_1 + \nu_2 I_2/I_1) & \nu_2 I_2/I_1 \\ \nu_2 & -\nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + f(t) \begin{pmatrix} (l_1/I_1) \sin \theta_1 \\ (l_2/I_2) \sin \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Agora vamos integrar esta última equação considerando $I_1 = I_2 \equiv I$.

Como o efeito de cada pulso é instantâneo (isto é, $f(t) = 0$ para $t \neq kT$, $k = 1, 2, \dots$), as componentes da última equação são lineares entre pulsos sucessivos. Em particular, para $0 < t < T$, temos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\nu \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} -(\nu_1 + \nu_2) & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Afirmção: Denotando $\dot{\theta}_1(0)$ e $\dot{\theta}_2(0)$ as velocidades angulares iniciais, a solução para o sistema (2.3) é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(t) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{L}(t) = \sum_{j=1}^2 \mathbf{W}_j \exp \lambda_j t$.

Aqui, λ_1 e λ_2 são os autovalores de \mathbf{A}_ν , sendo $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + \Delta)$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 - \Delta)$, $\Delta = (\nu_1^2 + 4\nu_2^2)^{1/2}$, e, \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 são as matrizes constantes

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

sendo $a = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu_1}{\Delta}\right)$, $d = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu_1}{\Delta}\right)$ e $b = -\frac{\nu_2}{\Delta}$.

Usaremos para a demonstração da afirmação anterior os seguintes resultados da teoria das EDOs:

Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada. Considere a EDO

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (2.5)$$

As seguintes afirmações são válidas:

- A matriz principal de (2.5), em $t_0 = 0$, é $\mathbf{P}(t) = \exp \mathbf{A}t$;
- Se $\mathbf{X}(t)$ é solução de (2.5) então $\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{V}$, sendo \mathbf{V} um vetor arbitrário e com dimensão adequada;
- A solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

é dada por $\mathbf{X}(t) = \exp \mathbf{A}t \cdot \mathbf{X}_0$: $\mathbf{X}(0) = \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade adequada.

Assim, a partir de tais resultados, temos que, para demonstrar a afirmação anterior basta demonstrar a seguinte:

Afirmação': Em (2.4), $\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t)$ é a matriz principal de (2.3).

Antes da demonstração, considere ainda mais alguns resultados relativos a (2.5):

- Se \mathbf{A} é diagonalizável então uma matriz fundamental de (2.5) é dada por

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp \lambda_1 t \cdot \mathbf{V}^{(1)} & \dots & \exp \lambda_n t \cdot \mathbf{V}^{(n)} \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{V}^{(1)}, \dots, \mathbf{V}^{(n)}$ os autovetores linearmente independentes de \mathbf{A} em relação aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente;

•

$$\mathbf{P}(t) = \Phi(t)(\Phi(0))^{-1}. \quad (2.6)$$

Demonstração: Inicialmente note que \mathbf{A}_ν é diagonalizável pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Daí:

- Cálculo de $\mathbf{V}^{(1)}$ relativo à $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + \Delta)$:

De

$$\begin{bmatrix} -(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + \Delta) & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_2 + \frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + \Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{(1)} \\ \mathbf{V}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podemos escalonar

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\nu_1 + \Delta) & \nu_2 \\ \nu_2 & \frac{1}{2}(\nu_1 + \Delta) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\nu_2}{(-\nu_1 + \Delta)} \\ 1 & \frac{(\nu_1 + \Delta)}{2\nu_2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\nu_2}{(-\nu_1 + \Delta)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo, por exemplo,

$$\mathbf{V}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{(1)} \\ \mathbf{V}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \Delta} \\ 1 \end{bmatrix};$$

- Cálculo de $\mathbf{V}^{(2)}$ relativo à $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 - \Delta)$:

De

$$\begin{bmatrix} -(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 - \Delta) & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_2 + \frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 - \Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{(2)} \\ \mathbf{V}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podemos escalonar

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\nu_1 - \Delta) & \nu_2 \\ \nu_2 & \frac{1}{2}(\nu_1 - \Delta) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2\nu_2}{(\nu_1 + \Delta)} \\ 1 & \frac{(\nu_1 - \Delta)}{2\nu_2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2\nu_2}{(\nu_1 + \Delta)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtendo, por exemplo,

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{(2)} \\ \mathbf{V}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\nu_2}{\nu_1 + \Delta} \\ 1 \end{bmatrix};$$

• De

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \Delta} \exp \lambda_1 t & \frac{2\nu_2}{\nu_1 + \Delta} \exp \lambda_2 t \\ \exp \lambda_1 t & \exp \lambda_2 t \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \Delta} & \frac{2\nu_2}{\nu_1 + \Delta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Phi(0))^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_2}{\Delta} & -\frac{\nu_1 - \Delta}{2\Delta} \\ \frac{\nu_2}{\Delta} & \frac{\nu_1 + \Delta}{2\Delta} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, da equação (2.6), temos

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\nu_1 + \Delta}{\Delta} \exp \lambda_1 t - \frac{1}{2} \frac{\nu_1 - \Delta}{\Delta} \exp \lambda_2 t & -\frac{\nu_2}{\Delta} \exp \lambda_1 t + \frac{\nu_2}{\Delta} \exp \lambda_2 t \\ -\frac{\nu_2}{\Delta} \exp \lambda_1 t + \frac{\nu_2}{\Delta} \exp \lambda_2 t & -\frac{1}{2} \frac{\nu_1 - \Delta}{\Delta} \exp \lambda_1 t + \frac{1}{2} \frac{\nu_1 + \Delta}{\Delta} \exp \lambda_2 t \end{bmatrix} = \mathbf{L}(t). \quad \square$$

Agora, podemos escrever a equação (2.4) da forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(t) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix}.$$

Daí, por integração, temos

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} \theta_1(\xi) \\ \theta_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \int_0^t \mathbf{L}(\xi) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} d\xi.$$

Assim, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro membro da última equação, e, sendo $\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix}$ uma constante no integrando do segundo membro, temos

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(t) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbf{M}(t) = \int_0^t \mathbf{L}(\xi) d\xi = \int_0^t \sum_{j=1}^2 \mathbf{W}_j \exp \lambda_j \xi d\xi = \sum_{j=1}^2 \mathbf{W}_j \frac{\exp \lambda_j t - 1}{\lambda_j}.$$

Note que, para $j = 1, 2$, devido ao pulso, θ_j é contínua em $t = T$ mas $\dot{\theta}_j$ não o é. Daí:

$$\theta_j(T^\pm) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_j(T \pm \epsilon) = \theta_j(T), \quad (2.8)$$

$$\dot{\theta}_j(T^\pm) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\theta}_j(T \pm \epsilon) = ? \quad (2.9)$$

A interrogação em (2.9) significa que precisamos obter $\dot{\theta}_j(T^\pm)$ de outro modo. Assim, da equação (2.2) (com $I_j = I$, $j = 1, 2$) temos

$$\begin{aligned} \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} dt &= \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} \mathbf{A}_\nu \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &+ \\ \frac{f_0}{I} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T-\epsilon}^{T+\epsilon} \delta(t - kT) \begin{pmatrix} l_1 \sin \theta_1(t) \\ l_2 \sin \theta_2(t) \end{pmatrix} dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T+\epsilon) \\ \dot{\theta}_2(T+\epsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T-\epsilon) \\ \dot{\theta}_2(T-\epsilon) \end{pmatrix} &= \mathbf{A}_\nu \left\{ \begin{pmatrix} \theta_1(T+\epsilon) \\ \theta_2(T+\epsilon) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_1(T-\epsilon) \\ \theta_2(T-\epsilon) \end{pmatrix} \right\} \\ &+ \\ \frac{f_0}{I} \begin{pmatrix} l_1 \sin \theta_1(T) \\ l_2 \sin \theta_2(T) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta, a equação (2.9) passa a ser a equação

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T^+) \\ \dot{\theta}_2(T^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T^-) \\ \dot{\theta}_2(T^-) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{f_0}{I} \begin{pmatrix} l_1 \sin \theta_1(T) \\ l_2 \sin \theta_2(T) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Para concluir a derivação do mapa observe que, a solução da equação (2.2) para $T < t < 2T$ é idêntica a solução da EDO linear (2.3) para $0 < t < T$ exceto que, para $j = 1, 2$, as condições iniciais $\theta_j(0), \dot{\theta}_j(0)$ são trocadas por $\theta_j(T), \dot{\theta}_j(T^+)$.

A solução da equação (2.2) é a composição da solução da equação (2.3) com o efeito dos pulsos em $t = T, 2T, \dots$. Para estudar a dinâmica do rotor é natural considerar apenas o estado do sistema imediatamente após cada pulso. Logo, das equações (2.4), (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos o mapa do rotor duplo dado na subseção anterior.

2.3 Pontos Fixos

Antes de calcularmos os pontos fixos do MRDP, por uma questão de completude, é interessante definir ponto fixo. Um *ponto fixo* (ou uma *órbita periódica de período um*), digamos \mathbf{x}_0 , para um mapa é um ponto do espaço de fase (espaço de estados) tal que, qualquer iterada de tal ponto pelo mapa resulta no próprio \mathbf{x}_0 . A dinâmica relevante no espaço de estados para um sistema físico ocorre em vizinhanças de órbitas periódicas e, em particular, de pontos fixos. Em uma *órbita periódica de período n* temos n pontos do espaço de estados. Cada um destes pontos é um ponto fixo para a n -ésima iterada do mapa. Isto posto, vamos inicialmente determinar uma fórmula para calcularmos os pontos fixos para o MRDP.

Independente de normalizarmos as variáveis físicas de interesse, sempre temos

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{A}_\nu \mathbf{M},$$

onde \mathbf{A}_ν é dada como na equação (2.3) da seção anterior.

Os pontos fixos $\mathbf{Z}_* = (\mathbf{X}_*, \mathbf{Y}_*)$ do MRDP são soluções de

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_* &= \mathbf{M}\mathbf{Y}_* + \mathbf{X}_* - 2\pi\mathbf{N}, \\ \mathbf{Y}_* &= \mathbf{L}\mathbf{Y}_* + \mathbf{G}(\mathbf{X}_*),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{N} = (n_1, n_2)$ são números (inteiros) de rotação nas variáveis x_1, x_2 , isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_* &= 2\pi\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{G}(\mathbf{X}_*) &= -2\pi\mathbf{A}_\nu\mathbf{N}\end{aligned}$$

Usando as definições de \mathbf{G} e \mathbf{A}_ν , a última equação fica

$$\begin{pmatrix} \sin x_{1*} \\ \sin x_{2*} \end{pmatrix} = -\frac{2\pi\nu I}{f_0} \begin{pmatrix} (1/l_1)(-2n_1 + n_2) \\ (1/l_2)(n_1 - n_2) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{f_0} \begin{pmatrix} f_{01} \\ f_{02} \end{pmatrix}.$$

Logo, para cada par de números de rotação (n_1, n_2) , existem quatro soluções possíveis para (x_{1*}, x_{2*}) , desde que

$$|f_0| \geq |f_{0c}|,$$

onde $|f_{0c}| = \max(|f_{01}|, |f_{02}|)$.

Denotaremos os pontos fixos por

$$\mathbf{Z}_*^{[\mathbf{N};q]} = (\mathbf{X}_*^{[\mathbf{N};q]}, \mathbf{Y}_*^{[\mathbf{N};q]})$$

ou simplesmente

$$[\mathbf{N}; q],$$

onde $q = 1, 2, 3, 4$, supondo

$$\begin{aligned} x_{1*}^{[\mathbf{N};1]} &= x_{1*}^{[\mathbf{N};2]} < x_{1*}^{[\mathbf{N};3]} = x_{1*}^{[\mathbf{N};4]} \\ x_{2*}^{[\mathbf{N};1]} &= x_{2*}^{[\mathbf{N};3]} < x_{2*}^{[\mathbf{N};2]} = x_{2*}^{[\mathbf{N};4]} \end{aligned} \cdot$$

Note que $\mathbf{Y}_*^{[\mathbf{N}]} = (y_{1*}^{[\mathbf{N}]}, y_{2*}^{[\mathbf{N}]})$ é o mesmo para os quatro pontos fixos, isto é, não depende de q .

2.3.1 Cálculo dos Pontos Fixos

Primeiramente note que

$$\begin{cases} f_{01} = -2\pi\sqrt{2}(-2n_1 + n_2) \\ f_{02} = -2\pi(n_1 - n_2) \end{cases} \Rightarrow {}^1 \begin{cases} |-2n_1 + n_2| \leq \frac{|f_0|}{2\pi\sqrt{2} \sim 8,89} \\ |n_1 - n_2| \leq \frac{|f_0|}{2\pi \sim 6,28} \end{cases} \cdot$$

Daí temos que:

(i) Para $0 < f_0 < 2\pi$ temos que

$$\begin{cases} |-2n_1 + n_2| = 0 \\ |n_1 - n_2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 - n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{1*} = \arcsen 0 \\ x_{2*} = \arcsen 0 \end{cases} \cdot$$

Logo, como $0 \leq x_{c*} < 2\pi, c = 1, 2$, temos

$$\underbrace{(x_{1*}, x_{2*}) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)}_{(\mathbf{I})}.$$

(ii) Para $2\pi \leq f_0 < 2\pi\sqrt{2}$ temos que

$$\begin{cases} |-2n_1 + n_2| = 0 \\ |n_1 - n_2| = 0, 1 \end{cases},$$

de onde surgem até 12 pontos fixos. De fato, temos

$$(\mathbf{I});$$

¹ $|f_{0c}| \leq |f_0|, c = 1, 2.$

Ainda temos que

$$\begin{cases} -2n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 - n_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_{1*} = \arcsen 0 \\ x_{2*} = \arcsen \frac{2\pi}{f_0} \end{cases}.$$

Logo

$$(x_{1*}, x_{2*}) = (0, x_{2*}^{[(1,2);1]}), (0, x_{2*}^{[(1,2);2]}), (\pi, x_{2*}^{[(1,2);3]}), (\pi, x_{2*}^{[(1,2);4]});$$

(IIa)

Por fim, temos que

$$\begin{cases} -2n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 - n_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n_1 = -1, n_2 = -2 \Rightarrow \begin{cases} x_{1*} = \arcsen 0 \\ x_{2*} = \arcsen -\frac{2\pi}{f_0} \end{cases}.$$

Logo

$$(x_{1*}, x_{2*}) = (0, x_{2*}^{[(-1,-2);1]}), (0, x_{2*}^{[(-1,-2);2]}), (\pi, x_{2*}^{[(-1,-2);3]}), (\pi, x_{2*}^{[(-1,-2);4]}).$$

(IIb)

(iii) Para $2\pi\sqrt{2} \leq f_0 < 4\pi$ temos que

$$\begin{cases} |-2n_1 + n_2| = 0, 1 \\ |n_1 - n_2| = 0, 1 \end{cases},$$

de onde surgem até 36 pontos fixos: além de (I), (IIa) e (IIb), um cálculo análogo aos anteriores resulta em mais 24 possibilidades. Por exemplo:

$$\begin{cases} -2n_1 + n_2 = -1 \\ n_1 - n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{1*} = \arcsen \frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0} \\ x_{2*} = \arcsen 0 \end{cases}$$

acarreta

$$(x_{1*}, x_{2*}) = (x_{1*}^{[(1,1);1]}, 0), (x_{1*}^{[(1,1);2]}, \pi), \underbrace{(x_{1*}^{[(1,1);3]}, 0), (x_{1*}^{[(1,1);4]}, \pi)}_{\text{se } f_0 > 2\pi\sqrt{2}}.$$

(iv) $f_0 \rightarrow \infty \Rightarrow (\text{número de pontos fixos}) \rightarrow \infty$.

Exemplo: Para $f_0 = 9$ temos

(n_1, n_2)	(x_{1*}, x_{2*})
(0, 0)	(I)
(1, 2)	(0, 0,773), (0, 2,369), (π , 0,773), (π , 2,369)
(-1, -2)	(0, 3,914), (0, 5,510), (π , 3,914), (π , 5,510)
(1, 1)	(1,411, 0), (1,411, π), (1,730, 0), (1,730, π)
(-1, -1)	(4,553, 0), (4,553, π), (4,872, 0), (4,872, π)
\vdots	\vdots

Usamos que (ver [16])

$(x_{1*}, x_{2*}, y_{1*}, y_{2*})$ é ponto fixo para $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$ se, e somente se,

$(2\pi - x_{1*}, 2\pi - x_{2*}, -y_{1*}, -y_{2*})$ é ponto fixo para $(-n_1, -n_2)$.²

Daí $x_{c*} = \arcsen \frac{f_{0c}}{f_0}$ para (n_1, n_2) se, e somente se, $2\pi - x_{c*} = \arcsen -\frac{f_{0c}}{f_0}$ para $(-n_1, -n_2)$.

Então, para resumir este capítulo, obtemos o MRDP e um modo de determinar seus pontos fixos a medida que varia o seu parâmetro f_0 , intensidade da força aplicada numa das duas hastes que compõe o rotor.

²De fato, o mapa do rotor duplo é invariante pela mudança de variáveis $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (2\pi - x_1, 2\pi - x_2, -y_1, -y_2)$.

Capítulo 3

Hiperbolicidade, Sombreamento e Variabilidade de Dimensão Instável

Como dito na introdução, este capítulo estabelece os conceitos e resultados matemáticos (inclusive os numéricos) para estudarmos não apenas o MRDP, como também famílias de mapas bidimensionais (construídos via acoplamento) que serão estudadas no capítulo 5.

Primeiramente consideraremos algumas condições.

- Sejam $\mathbf{f} : \mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^d$ um difeomorfismo¹ e $(\mathbf{f}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a sequência de compostas de \mathbf{f} onde \mathbf{f}^0 é a identidade.
- Seja Λ um subconjunto compacto de \mathcal{R}^d . Considere ainda que Λ é um conjunto invariante por \mathbf{f} , isto é, $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) \in \Lambda$, $\forall n, \forall \mathbf{x} \in \Lambda$. Para $\mathbf{x}_0 \in \Lambda$ definimos $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_n$.

Numericamente \mathbf{f} pode ser vista como uma regra que determina uma fórmula de recorrência, isto é, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$. Fisicamente o domínio n -dimensional de \mathbf{f} pode ser visto como um espaço de estados n -dimensional. Λ pode ser considerado como um conjunto atrativo de trajetórias deste espaço.

- Seja $E_{\mathbf{x}}^u$ (respectivamente, $E_{\mathbf{x}}^s$) a variedade linear instável (respectivamente, estável) gerada pelos autovetores associados aos autovalores de módulos maiores (respectivamente, menores) do que 1 da jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \Lambda$.

¹No que se segue, ao invés de \mathcal{R}^d poderíamos considerar variedades compactas adequadas mergulhadas em \mathcal{R}^d .

E_x^u (respectivamente, E_x^s) é um subespaço vetorial do espaço de estados onde qualquer trajetória pertencente ao mesmo se aproxima arbitrariamente de \mathbf{x} quando $n \rightarrow -\infty$ (respectivamente, $n \rightarrow \infty$).

- Seja Λ um conjunto hiperbólico, isto é:

- (i) Em cada ponto de $\mathbf{x} \in \Lambda$ o espaço de fase pode ser decomposto em uma soma direta das variedades lineares, isto é,

$$T_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}}^u \oplus E_{\mathbf{x}}^s; \quad (3.1)$$

- (ii) A decomposição (3.1) varia continuamente com \mathbf{x} e, para cada $\mathbf{x} \in \Lambda$, é invariante sob a ação do mapa tangente $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}} \rightarrow T_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$, isto é,

$$\mathbf{Df}_{\mathbf{x}_n}(E_{\mathbf{x}_n}^{u,s}) = E_{\mathbf{x}_{n+1}}^{u,s}; \quad (3.2)$$

- (iii) Se \mathbf{y}_0 é um vetor que pertence a uma vizinhança suficientemente pequena de $E_{\mathbf{x}_0}^s$ (respectivamente, $E_{\mathbf{x}_0}^u$) e $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_n)\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n+1}$ para $n \geq 0$ (respectivamente, $\mathbf{Df}^{-1}(\mathbf{x}_n)\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1}$ para $n \leq 0$), temos que $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$ (a uma taxa constante) se $n \rightarrow +\infty$ (respectivamente, $n \rightarrow -\infty$), $\forall \mathbf{x}_0 \in \Lambda$.

Conjuntos hiperbólicos satisfazem propriedades matemáticas interessantes. Como veremos, uma destas propriedades refere-se a capacidade de órbitas numéricas estarem sempre arbitrariamente próximas de órbitas verdadeiras.

- Seja $\{\mathbf{p}_n\}_{n=a}^b$ (embora sejam permitidos $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, no que se segue consideramos a e b finitos) uma δ -pseudo-órbita para \mathbf{f} , isto é, $\|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{p}_n)\| < \delta$ para $n = a, \dots, b-1$.

Para os nossos propósitos, uma pseudo-trajetória é uma lista discreta de números, gerada por uma regra de evolução temporal implementada computacionalmente, tal como uma aproximação do tipo Runge-Kutta para uma solução numérica de uma EDO. Tipicamente, para cada dado número de iteradas, existe uma discrepância entre a regra e a equação dinâmica correspondente, devido ao erro de truncamento da regra ou as propriedades de arredondamento do computador.

- Seja $\{\mathbf{x}_n\}$ uma órbita *verdadeira*, isto é, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.

Numericamente não existem órbitas verdadeiras. Para os nossos propósitos uma órbita verdadeira será um trajetória calculada com a maior precisão possível a partir de uma condição inicial. Pseudo-órbitas podem ser obtidas a partir da mesma condição inicial, calculadas em precisões menores.

- Considere que $\{\mathbf{x}_n\}$ *ε-sobreia* $\{\mathbf{p}_n\}$ em $[a, b]$, isto é, $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}_n\| < \epsilon$ para $n = a, \dots, b$.

Para as próximas hipóteses, utilizadas no **lema do sombreamento** que será apresentado na próxima seção, é importante dizer que o conjunto atrativo Λ é um *atrator* se a seguinte definição operacional é satisfeita: Λ é um conjunto no qual pontos $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$, para n suficientemente grande, se acumulam. Ainda, a união de dois atratores disjuntos, se existem, não é um atrator.

- Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^d$ um ponto *errático*, isto é, existe alguma vizinhança do mesmo, digamos $U_{\mathbf{x}_0}$, tal que $\mathbf{f}^n(U_{\mathbf{x}_0}) \cap U_{\mathbf{x}_0} = \emptyset$ para n suficientemente grande.
- Considere o conjunto *não errático* $\Omega(\mathbf{f}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d : \mathbf{x} \text{ não é errático}\}$.²
- Não é difícil demonstrar que (ver [18]) $\Omega(\mathbf{f})$ é um subconjunto compacto de \mathcal{R}^d , invariante por \mathbf{f} e que contém todos os atratores do sistema dinâmico.

3.1 Algumas Propriedades Matemáticas de Conjuntos Hiperbólicos

Considerando as definições e notações anteriores temos que:

(H1) $E_{\mathbf{x}}^u \cap E_{\mathbf{x}}^s = \{\mathbf{0}\}$, $\forall \mathbf{x} \in \Lambda$.³ Isto segue diretamente do item (i) anterior.

A propriedade (H1) significa que o ângulo entre as variedades lineares $E_{\mathbf{x}}^u$ e $E_{\mathbf{x}}^s$ não pode ser nulo.

(H2) $\dim E_{\mathbf{x}}^{u,s} = \dim E_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}^{u,s}$, $\forall \mathbf{x} \in \Lambda$.

²Os pontos periódicos de \mathbf{f} são claramente não erráticos.

³Na verdade, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o vetor nulo do espaço vetorial $T_{\mathbf{x}}$.

De fato, como \mathbf{f} é um difeomorfismo, $D\mathbf{f}_x : T_x \rightarrow T_{\mathbf{f}(x)}$ é um isomorfismo, $\forall x \in \Lambda$. Daí, por (3.2), a restrição $D\mathbf{f}_x|_{E_x^{u,s}} : E_x^{u,s} \rightarrow E_{\mathbf{f}(x)}^{u,s}$ também é um isomorfismo, $\forall x \in \Lambda$. O resultado segue do fato de que dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão. Uma consequência da propriedade **(H2)** é que a dimensão instável (estável) é invariante ao longo de uma trajetória típica em Λ .

(H3) Variedades locais (não lineares) estáveis e instáveis podem ser definidas para cada $x \in \Lambda$. Estas são tangentes às respectivas variedades lineares estáveis e instáveis (ver [18] e [19]).

A variedade instável (estável) tangente a E_x^u (E_x^s) é um conjunto invariante por \mathbf{f} definido por $W_x^u = \{y \in \mathcal{R}^d; \mathbf{f}^n(y) \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow -\infty\}$ ($W_x^s = \{y \in \mathcal{R}^d; \mathbf{f}^n(y) \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$).

(H4) Pequenas perturbações no sistema hiperbólico com atrator caótico não afetam o “sombreamento” de órbitas perturbadas por “verdadeiras” ad infinitum (ver [1] e [2]). A figura 3.1 ilustra o sombreamento de uma pseudo-órbita por uma órbita “verdadeira” do sistema.

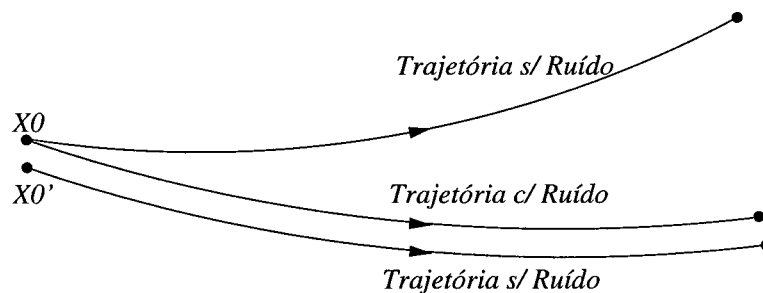


Figura 3.1: Dada uma trajetória perturbada (com ruído) com condição inicial x_0 , é possível obter outra condição inicial x'_0 da qual parte uma trajetória verdadeira (sem ruído) que evolui próxima da órbita perturbada que parte de x_0 .

Na verdade temos o seguinte resultado de [1],⁴

Lema do Sombreamento 3.1 *Supondo que \mathbf{f} satisfaz o axioma A, isto é,*

⁴Na verdade tal resultado foi estabelecido na página 38 de [20], para o caso de um difeomorfismo de Anosov, sendo que sua demonstração é uma variação da demonstração que aparece em [2]. \mathbf{f} é um difeomorfismo de Anosov se está definido numa variedade que é toda hiperbólica.

A1. $\Omega(f)$ é hiperbólico, e,

A2. O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em $\Omega(f)$,

temos que, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, toda δ -pseudo-órbita $\{p_n\}$ da restrição $f|_\Lambda$ é ϵ -sombreada por alguma órbita verdadeira $\{x_n\}$, para alguma condição inicial $x_0 \in \mathcal{R}^d$.

Exemplo de um conjunto não-hiperbólico onde não existe sombreamento a tempo infinito: Seja f_0 o parâmetro de controle do MRDP. Existe não-hiperbolicidade numa vizinhança de $f_0 = 8$ (Ver, por exemplo, [10] e [11]). Isto se reflete numa perda de confiabilidade das trajetórias numéricas. Por exemplo, da figura 3.2 é possível inferir que não importa com que precisão numérica iteremos uma mesma condição inicial: depois de poucas iteradas, as pseudo-órbitas originárias da condição inicial (computadas em precisões diferentes) divergem exponencialmente.⁵ Tal exemplo nos inspira a questionar os problemas advindos da não-hiperbolicidade de um conjunto invariante.

3.2 Falha na Hiperbolicidade

Considerando as definições e notações anteriores temos que:

1. Um atrator não é hiperbólico se existe x no mesmo cujas variedades estável e instável se interceptam tangencialmente. Nestas tangências (homoclínicas) E_x^u e E_x^s não são definidas (ver propriedade (H1) anterior). (Ver figura 3.3).

Tempo de sombreamento: finito mas longo o suficiente para obter informações sobre o sistema. (Ver [5], [6], [7] e [8]).

2. Abraham e Smale [9] exibiram um difeomorfismo com conjunto invariante tal que $\dim E_x^u = 1, 2$, dependendo de x (ver figura 3.4). Tal comportamento é dito Variabilidade de Dimensão Instável (VDI). (Ver [4], [9], [10] e [11]).⁶

Tempo de sombreamento: suficiente para se obter informações estatísticas de alguns sistemas pseudo-determinísticos. (Ver, por exemplo, [12]).

⁵Posteriormente calcularemos o tempo de sombreamento de tais trajetórias. Tal tempo, a menos de erro numérico, terá um bom ajustamento (do inglês *fitting*) com o da figura 3.2.

⁶Foi em [9] que a VDI primeiramente apareceu.

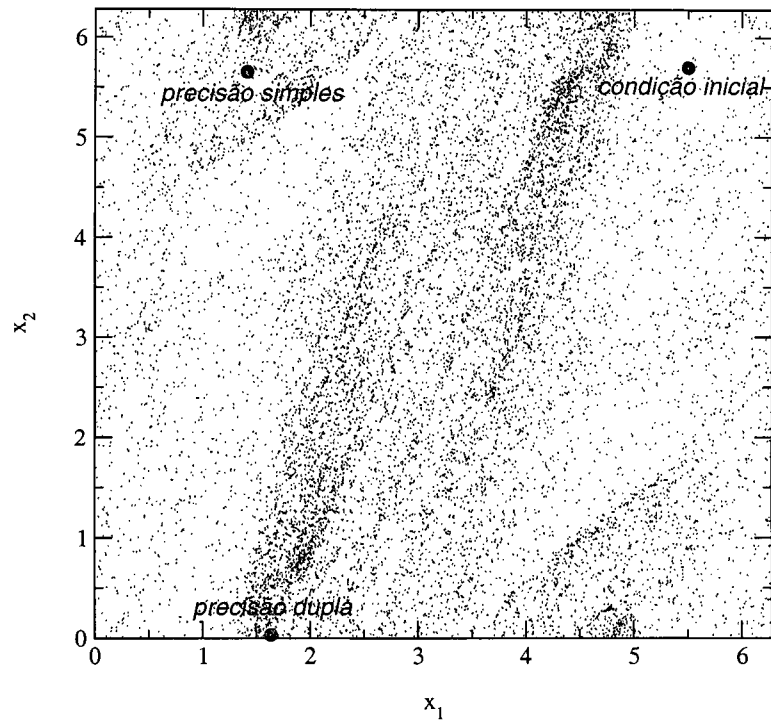


Figura 3.2: Iteração da condição inicial $(5,5, 5,7, 0,0, 0,0)$ para o MRDP em precisões simples e dupla, divergindo exponencialmente a partir da décima oitava iterada. Aqui, $f_0 = 7,5$.

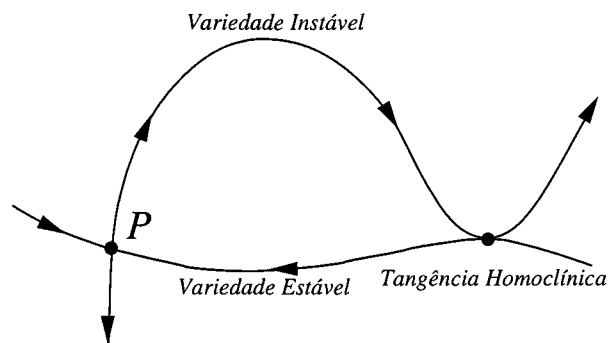


Figura 3.3: Tangência Homoclínica entre Variedades Estável e Instável de um Ponto Fixo (de Sela).

No capítulo um foi dito que se existe VDI as trajetórias numéricas são confiáveis por pouco tempo (ver também a figura 3.2). O motivo é que uma órbita típica tem segmentos de órbita que na média são repulsivos em uma dimensão e segmentos de órbita que na média

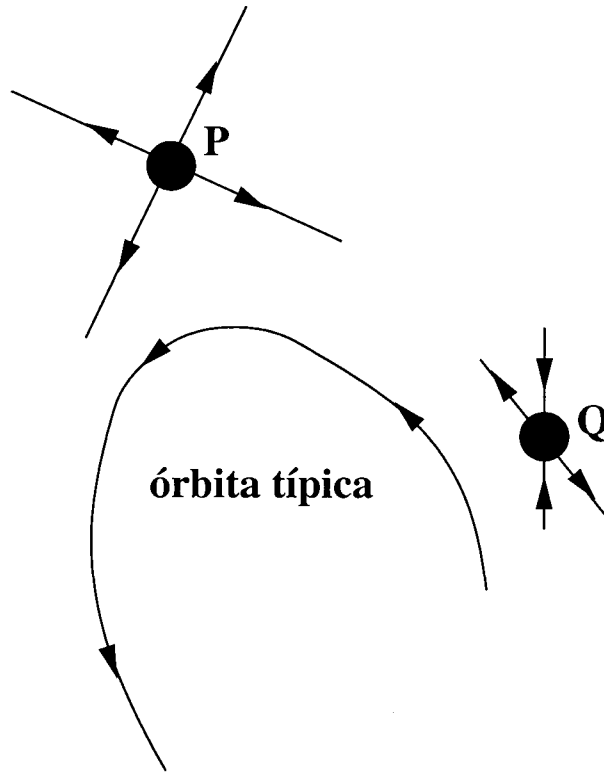


Figura 3.4: Crise de Identidade: Uma órbita típica (do conjunto invariante) ao passar nas vizinhanças de pontos como P e Q acima, não sabe se fica com uma ou duas direções instáveis.

são repulsivos em duas dimensões. Isto tem sido verificado numericamente, inclusive para o MRDP, via a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito em torno de 0 (ver, por exemplo, [10], [11] e [21]).

Agora vamos elaborar melhor sobre tais expoentes.

3.3 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Seja n um inteiro positivo. O k -ésimo expoente de Lyapunov a tempo n associado a condição inicial \mathbf{x}_0 é dado por (ver [22])

$$\lambda_k(\mathbf{x}_0; n) = \frac{1}{n} \ln |\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_k|, \quad (3.3)$$

onde \mathbf{u}_k é o autovetor de $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ associado ao autovalor $\sigma_k(\mathbf{x}_0, n)$, sendo $\sigma_1(\mathbf{x}_0, n) \geq \dots \geq \sigma_d(\mathbf{x}_0, n) \geq 0$.

Exemplo: Na figura 3.5 temos a distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito mais próximos de zero para o MRDP.

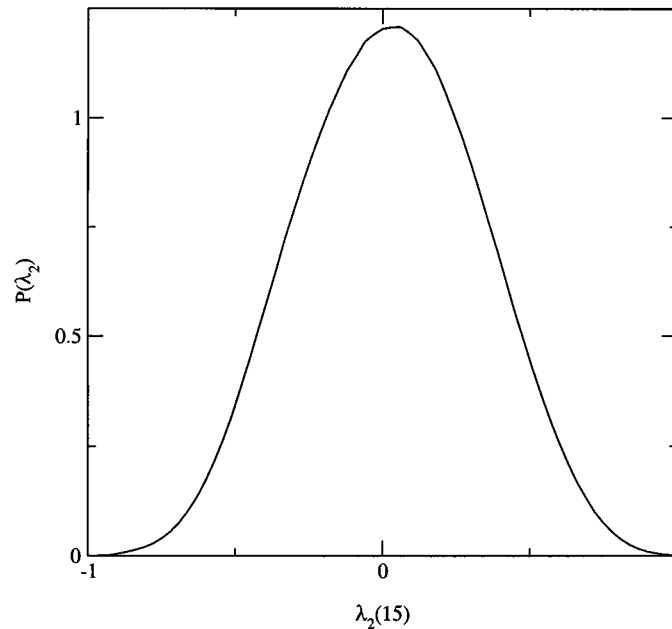


Figura 3.5: Distribuição de probabilidade $P(\lambda_2, 15)$ para o segundo expoente de Lyapunov a tempo 15, considerando o MRDP para $f_0 = 8,0$. Seguindo o algoritmo numérico dado no final desta seção, a figura foi obtida a partir de 1000 condições iniciais geradas de forma aleatória. Para cada uma destas, após um transiente acima de 6000 iteradas, calculamos os $\lambda_2(15)$ 10000 vezes ao longo da trajetória.

É conveniente ressaltar que, considerando (sem perda de generalidade) \mathbf{u}_k normalizado, a equação (3.3) passa a ser a equação

$$\lambda_k(\mathbf{x}_0; n) = \frac{1}{n} \ln \sigma_k(\mathbf{x}_0, n). \quad (3.4)$$

Como já citado anteriormente no capítulo um, uma indicação numérica da VDI é o comportamento flutuante (em torno de zero) dos $\lambda_k(n)$ mais próximos de zero. Isto porque, na presença de VDI, existem pontos instáveis com diferentes dimensões instáveis, o que faz que uma órbita típica contida no atrator visite vizinhanças suficientemente pequenas de repulsores e pontos de sela. Isto significa que existem segmentos a tempo n (que representam

n iteradas de um mapa) para os quais a trajetória é, em média, transversalmente atrativa ou repulsiva. Isto é quantificado pelos $\lambda_k(n)$: quando segmentos a tempo n de uma trajetória são tais que existe uma contração (expansão) média ao longo de suas autodireções, o correspondente $\lambda_k(n)$ é negativo (positivo). Daí, se o conjunto caótico invariante exibe VDI, existem segmentos a tempo n de uma trajetória típica para os quais $\lambda_k(n)$ é positivo, ainda que o expoente de Lyapunov a tempo infinito $\lambda_k(\infty)$ seja negativo. O fato de que, devido a VDI, $\lambda_k(n)$ flutua erráticamente em torno de zero, encoraja o uso dos $\lambda_k(n)$ como variáveis aleatórias e de sua distribuição de probabilidades $P(\lambda_k, n)$.

3.3.1 Propriedades dos $\lambda_k(\mathbf{x}_0; n)$

Considerando as definições e notações anteriores temos que:

- L1.** $\lambda_k(\mathbf{x}_0, n)$ mede a variação local da taxa de contração ou expansão de pequenas perturbações numa órbita a cada n passos ao longo da órbita a partir de \mathbf{x}_0 ;
- L2.** $n \rightarrow \infty \Rightarrow \langle \lambda_k(n) \rangle \rightarrow \lambda_k(\infty)$;
- L3.** A distribuição de probabilidade $P(\lambda_k, n)$ dos $\lambda_k(n)$ conta o número (normalizado) de vezes que cada um dos valores de $\lambda_k(n)$ aparece a medida que \mathbf{x}_0 varia no atrator;
- L4.** Podemos tirar informações importantes de $P(\lambda_k, n)$ examinando suas médias e momentos em torno da média.
- L5.** Abarbanel e colaboradores (ver [23]) mostraram que médias e momentos em torno da média respeitam uma lei de potência aqui ilustrada pela variância: $\sigma_n^2 \propto n^{-\nu}$, onde $\nu \geq 0,5$.

Na verdade, embora em [23] seja estabelecido que $\nu \approx 0,5 - 1,0$, não são apresentados quaisquer argumentos (geométricos ou de qualquer outro tipo) que justifiquem os valores observados de ν . De fato, os autores destacam que, embora os únicos argumentos que eles conseguiram construir ou encontrar na literatura especializada (ver [24], [25] e [26]) sugerem $\nu = 0.5$ ou $\nu = 1.0$, em seus cálculos não surgem nem $\nu = 0.5$ nem $\nu = 1.0$. Os argumentos baseados em hipóteses do tipo “Teorema do Limite Central” (ver [25] e [26]) obtêm $n^{-1/2}$, enquanto que aqueles baseados em analiticidade no tempo obtêm n^{-1} (ver [24]). Contudo, em [27] é verificado que a variância pode decair, de forma anômala, como $1/n^2$.

- L6.** A flutuação dos $\lambda_k(n)$ em torno de 0 é consequência da VDI.

Vamos demonstrar a propriedade **L6** anterior, isto é, se existe VDI então os $\lambda_k(n)$ mais próximos de zero flutuam em torno do mesmo. De fato, sabemos que se existe VDI podemos exibir trajetórias com dimensão instável não invariante ao longo das mesmas. Considerando uma destas trajetórias com condição inicial \mathbf{x}_0 no conjunto caótico invariante, temos que existe um conjunto infinito de inteiros n_1 e n_2 suficientemente grandes, tais que as jacobianas $\mathbf{Df}(\mathbf{f}^{n_1}(\mathbf{x}_0))$ e $\mathbf{Df}(\mathbf{f}^{n_2}(\mathbf{x}_0))$ têm, digamos, 1 e 2 autovalores de módulos maiores do que 1, respectivamente. Considere \mathbf{x}_0 numa vizinhança de um ponto fixo com duas direções instáveis. Considere que $m(\mathbf{x}_0)$ iteradas de \mathbf{f} a partir de \mathbf{x}_0 representam um trecho da órbita em que $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_i)$ têm apenas um autovalor de módulo maior do que um, $i = 0, \dots, m(\mathbf{x}_0)$, e, devido a órbita se aproximar do ponto fixo citado acima, $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_{m(\mathbf{x}_0)+1}), \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{m(\mathbf{x}_0)+2}), \dots, \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{m(\mathbf{x}_0)+s})$ têm dois autovalores de módulos maiores do que um.

Embora estejamos trabalhando com conjuntos que não são hiperbólicos, é correto afirmar que $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m(\mathbf{x}_0)}$ é um conjunto (discreto) hiperbólico.⁷ Agora, seja σ_0 o único autovalor com módulo maior do que um de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$. Seja $\mathbf{u}_0 \in E_{\mathbf{x}_0}^u$ um autovetor de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$ associado a σ_0 . Daí, por argumento de continuidade (lembrar que $\mathbf{Df}_{\mathbf{x}_0}(E_{\mathbf{x}_0}^u) = E_{\mathbf{x}_1}^u$), temos que $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 \in E_{\mathbf{x}_1}^u$ é uma autodireção instável. Como $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_1)$ tem apenas um único autovalor de módulo maior do que um, \mathbf{u}_1 é um autovetor de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_1)$ associado a tal autovalor. Também por argumento de continuidade no trecho hiperbólico, temos que $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \in E_{\mathbf{x}_2}^u$. Seguindo tal argumento mais algumas (n) vezes, temos que $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \prod_{i=0, \dots, n-1} \mathbf{Df}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_n \in E_{\mathbf{x}_n}^u$. Um argumento semelhante demonstra que se $\mathbf{u}_0 \in E_{\mathbf{x}_0}^s$ então $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_n \in E_{\mathbf{x}_n}^s$. Assim concluímos que se $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_i)$ têm apenas um autovalor de módulo maior do que um (uma única autodireção instável), $i = 0, \dots, n-1 < m(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ também tem apenas uma autodireção instável.

Se denotarmos, por abuso de notação, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{m(\mathbf{x}_0)+1}) \doteq \mathbf{x}_0$, uma argumentação semelhante a anterior demonstra que se $\mathbf{Df}(\mathbf{x}_i)$ têm apenas dois autovalores de módulos maiores do que um (apenas duas autodireções instáveis), $i = 0, \dots, n-1$, então $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ também tem apenas duas autodireções instáveis.

Assim, usando a definição (3.3) e sabendo que $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ terá um ou dois autovalores de módulos maiores do que 1, dependendo de n , temos que $\lambda_k(n)$ (sendo $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_k$ para algum k adequado da definição (3.3)) será menor ou maior do que zero, dependendo da iterada n ao longo da trajetória.

⁷O conjunto caótico invariante não é hiperbólico nos pontos fixos com um número diferente de direções instáveis. As falhas no sombreado nos trechos não-hiperbólicos das trajetórias (que se aproximam de tais pontos fixos instáveis) são conhecidas como “glitches” (ver [10]).

A argumentação anterior demonstra a propriedade **L6**. Será que a recíproca é verdadeira? Isto é, a flutuação dos expoentes de Lyapunov mais próximos de zero em torno do próprio zero implica em VDI?

Para sistemas caóticos não-hiperbólicos via tangências homoclínicas (por exemplo, para os mapas de Hénon e Ikeda), os $\lambda_k(n)$ ($k = 1, 2$) flutuam, mas aparentemente não em torno de zero. Isto pode ser verificado em, por exemplo, [11] e [23]. (De fato, em [11] é argumentado que mapas bidimensionais caóticos não-hiperbólicos via tangências homoclínicas não podem apresentar VDI). Na figura 3.6 podemos ver um exemplo deste comportamento para o mapa de Ikeda $z_{n+1} = a + bz_n \exp(i\kappa - \frac{i\alpha}{1+|z_n|^2})$, onde $z = x + iy$, com parâmetros $a = 1,0027$, $b = 0,9$, $\kappa = 0,4$ e $\alpha = 6,0$. Contudo, uma resposta a pergunta anterior merece

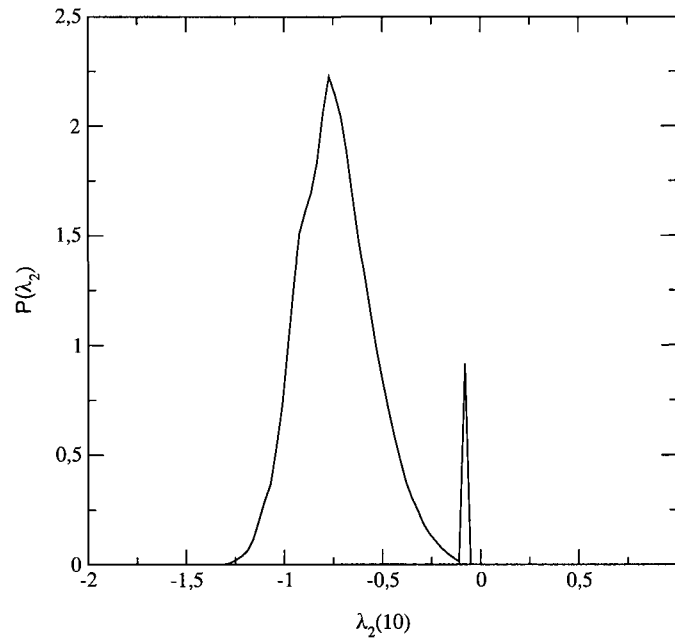


Figura 3.6: Distribuição de probabilidade $P(\lambda_2, 10)$ dos $\lambda_2(10)$ para o mapa de Ikeda com parâmetros de regime caótico. Note que parece existir uma barreira para os $\lambda_2(10)$ próximos de zero.

ser melhor trabalhada. Caso seja negativa, isto é, se obtermos um contra-exemplo no qual ocorra a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito mais próximos de zero (em torno do mesmo) sem a ocorrência de VDI, o teste de tal flutuação para se detectar VDI deverá, naturalmente, ser utilizado com algum critério.

Seguindo o algoritmo numérico dado a seguir, a figura 3.6 foi obtida a partir de 1000 condições iniciais geradas de forma aleatória. Para cada uma destas, após um transiente correspondente a 1000 iteradas, calculamos os $\lambda_2(10)$ mil vezes ao longo da trajetória.

3.3.2 Cálculo Numérico dos $\lambda_k(n)$

Para calcular os $\lambda_k(n)$ utilizamos um método numérico similar ao método Eckmann-Ruelle que se encontra nas páginas 650-651 de [28]. Basicamente, procedemos da seguinte maneira:⁸

- (I) A partir de uma condição inicial, iteramos \mathbf{f} até que o transiente⁹ do sistema tenha terminado;
- (II) Seja \mathbf{x}_0 uma iterada de \mathbf{f} , passado o transiente. Calculamos $\mathbf{f}^i(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{Df}(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}_0))$, $i = 0, \dots, n - 1$;
- (III) Calculamos a matriz $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$, que é o produto das jacobianas do item (II) anterior;
- (IV) Se $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ não for simétrica, utilizamos a rotina **balanc** de [29]¹⁰;
- (V) Fazemos a redução de $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ a forma de Hessemberg via a rotina **elmhes** de [29];
- (VI) Calculamos os autovalores de $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ utilizando a rotina **hqr** de [29];
- (VII) Calculamos os $\lambda_k(n)$ utilizando os autovalores do item (VI) e a equação (3.4);
- (VIII) Ordenamos os $\lambda_k(n)$ em ordem crescente e os registramos;
- (IX) Recomeçamos a partir do item (II), permutando \mathbf{x}_0 por $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$. Este item deve ser repetido um número suficientemente grande de vezes;
- (X) Repetimos o item (I) quantas vezes forem necessárias.

Seguir tal procedimento é estar muito próximo de se obter uma população suficientemente grande das variáveis aleatórias $\lambda_k(n)$ para que se possa conseguir uma boa estatística.

⁸O uso das rotinas do *numerical* [29] neste algoritmo foi uma idéia original do Professor Dr. Antônio M. Batista, da Universidade Estadual de Ponta Grossa-PR.

⁹Em teoria o transiente representa a evolução temporal do sistema antes do mesmo atingir seu estado final. Na prática, se o estado final não for uma órbita periódica, iteramos \mathbf{f} um número suficientemente grande de vezes para tentar eliminar o transiente.

¹⁰Tal item é necessário pois a próxima rotina numérica só funciona para matrizes simétricas.

Resumindo este capítulo, estabelecemos alguns conceitos matemáticos, sendo que os mais importantes, descritos aqui com abuso de linguagem, são os seguintes: (1) Um conjunto invariante caótico ter a sua hiperbolicidade quebrada via VDI significa que trajetórias (numéricas) neste atrator deixam de representar órbitas verdadeiras do sistema, sendo que, como veremos, o problema se torna mais agudo quando a VDI é máxima; (2) Na literatura científica disponível, o que tem detectado a VDI é a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito em torno de 0.

Os próximos capítulos abordarão sombreamento, VDI e expoentes de Lyapunov a tempo finito para o MRDP e mapas bidimensionais de co-dimensão um.

Capítulo 4

Variabilidade de Dimensão Instável para o Mapa do Rotor Duplo Pulsado

Neste capítulo vamos estudar a VDI para o MRDP. Inicialmente vamos fundamentar matematicamente a ocorrência de VDI em torno de $f_0 = 8$, sendo que, numericamente, tal fato já é bem conhecido (ver, por exemplo, [10]). Vamos ainda estabelecer (aproximadamente) a partir de qual valor de f_0 ocorre a VDI. Contudo, o que acarreta a VDI no seu limiar será assunto do penúltimo capítulo. Antes, no próximo capítulo, exibiremos outras formas de ocorrência de VDI para outros tipos de mapas.

A partir da jacobiana do MRDP

$$\mathbf{D_Z F(Z)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I_2} & \mathbf{M} \\ \mathbf{H(X')} & \mathbf{L + H(X')M} \end{pmatrix},$$

onde o termo não linear é dado por

$$\mathbf{H(X')} = \mathbf{D_{X'} G(X')} = \begin{pmatrix} c_1 \cos x'_1 & 0 \\ 0 & c_2 \cos x'_2 \end{pmatrix},$$

e da equação característica

$$P(s) = |\mathbf{D_Z F(Z_*)} - s\mathbf{I_4}| = |s^2\mathbf{I_2} - s(\mathbf{I_2} + \mathbf{L} + \mathbf{HM}) + \mathbf{L}| = 0, \quad (4.1)$$

obtemos que, em uma vizinhança do forçamento $f_0 = 8$, existe um único autovalor que acarreta uma bifurcação de co-dimensão 1, isto é, igual a 1 ou a -1, apenas para $[\mathbf{N} = (0, 0); q = 4]$, isto é, $\mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)$.¹ (Os tipos de bifurcações de co-dimensão 1 mais

¹Quando calculamos os pontos fixos para o MRDP, vimos que em tal vizinhança, existem 12 pontos fixos. Vão surgir novos pontos fixos só a partir de $f_0 \simeq 8,89$.

importantes serão vistos no próximo capítulo). Na verdade, para \mathbf{P}_π , temos $s_2 = -1$, onde $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ são as raízes de (4.1) (ver figura 4.1).

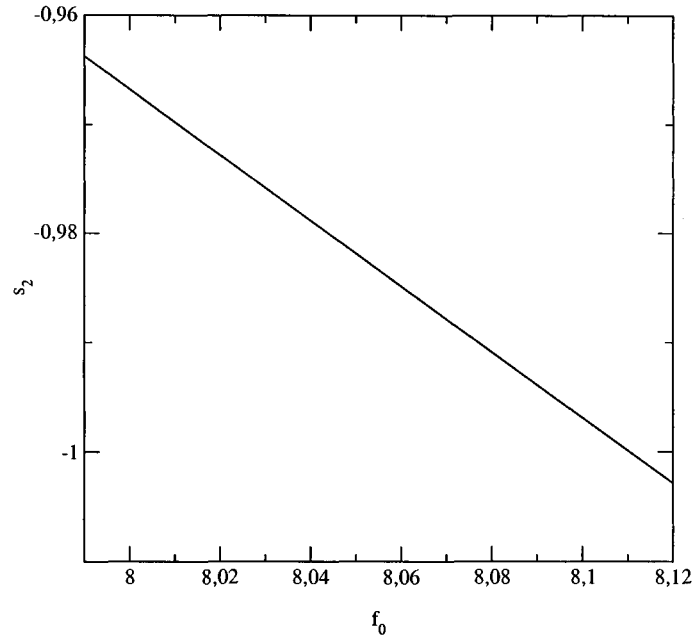


Figura 4.1: Gráfico de s_2 dependendo de f_0 .

4.1 Teoria da Variedade Central e o Mapa do Rotor Duplo Pulsado

Aqui vamos argumentar que, assim como para o parâmetro $f_0 \simeq 4,27$, em \mathbf{P}_π existe uma bifurcação de duplicação de período para $f_0 \simeq 8,11$. Tal fato está ligado a ocorrência de VDI onde a mesma é máxima. A fundamentação destes e de outros fatos terá lugar a partir da próxima subseção. No início desta seção estaremos apenas destacando alguns dos resultados relacionados com a VDI para o MRDP e o caminho para obtê-los. Considere o seguinte:

- Considerando $f_0 \simeq 8,11$, $\mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi)$ tem apenas um autovalor igual a -1 , os outros têm módulos diferentes de 1;

- Autovalor da bifurcação em \mathbf{P}_π : -1 ;
- Quando \mathbf{P}_π bifurca pela primeira vez em $f_0 \simeq 4,27$ (ver figura 4.2), este vem estável

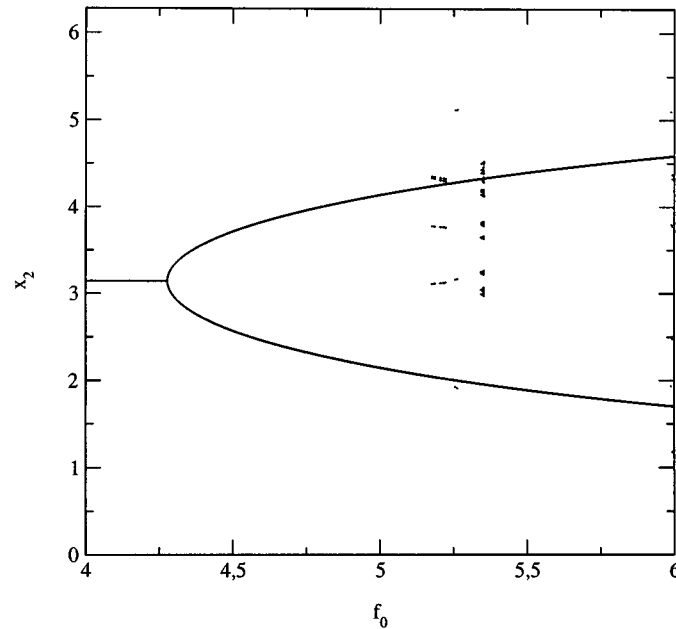


Figura 4.2: Diagrama de Bifurcação para $f_0 \in [4,0,6,0]$. Para cada um dos 8000 valores de f_0 considerados, iteramos cada uma das 500 condições iniciais consideradas, desconsiderando transientes correspondentes a mais de 6000 iteradas.

e perde a estabilidade via um único autovalor $s = -1$, passando a ter 3 autodireções estáveis e uma instável até $f_0 < f_{0c} \approx 8,1104126$. Daí temos $d^u = 1$ neste intervalo. \mathbf{P}_π tem uma segunda bifurcação em $f_0 = f_{0c}$, já no conjunto caótico (ver figura (4.3) para verificar que para tal forçamento já temos caos) e $s_2 = -1$ como acima, passando a ter duas autodireções estáveis e duas instáveis ($d^u = 2$) para $f_0 > f_{0c}$. Ainda, toda pré-imagem de \mathbf{P}_π herda tal propriedade;

- Devido a existirem, após tal bifurcação, um conjunto \mathcal{C} enumerável infinito de pontos fixos (\mathbf{P}_π e suas pré-imagens, que são na verdade pontos do tipo “eventually fixed points” mergulhados no conjunto caótico [30]) com dimensão instável igual a dois e um conjunto (parte do complementar de \mathcal{C}) não enumerável de pontos com dimensão instável igual a um, $f_0 = f_{0c}$ identifica a ocorrência de VDI;

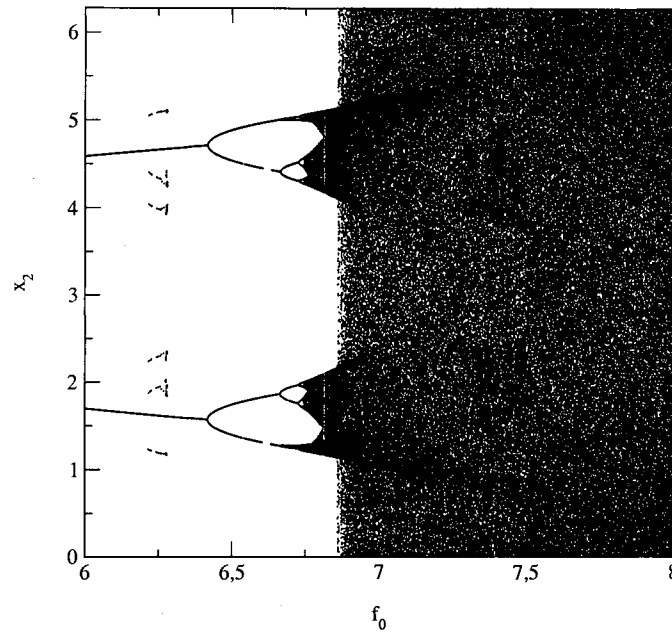


Figura 4.3: Diagrama de Bifurcação para $f_0 \in [6,0,8,0]$. Para cada um dos 8000 valores de f_0 considerados, iteramos cada uma das 500 condições iniciais consideradas, desconsiderando transientes correspondentes a mais de 6000 iteradas.

Isto ainda não significa que (\mathbf{P}_π, f_{0c}) representa o limiar (*onset*) da VDI (como veremos em breve). Por outro lado, no penúltimo capítulo exibiremos outro ponto fixo (diferente de \mathbf{P}_π), tal que, juntamente com as suas pré-imagens, formam um conjunto enumerável de pontos com dimensão instável igual a 2, já para $f_0 < f_{0c}$. Isto revela a ocorrência de VDI antes de 8,11.

- Bifurcação em \mathbf{P}_π : Duplicação de Período;

Os resultados dados a seguir (fundamentados a partir da próxima subseção) atestam o último item.

- Pela Teoria da Variedade Central (ver o teorema do início da próxima subseção e também [19], páginas 357-374. Por tal teoria, a dinâmica do sistema pode ser reduzida a dinâmica restrita a variedade central), temos a seguinte candidata para ser a forma normal associada a bifurcação de duplicação de período:

$$f(u, f_0) = -u - (f_0 - f_{0c})u + u^3, \quad u \in \mathcal{R}^1, \quad f_0 \in \mathcal{R}^1; \quad (4.2)$$

Para tal forma estamos supondo que, após fazermos a redução a variedade central, o ponto fixo \mathbf{P}_π foi transformado na origem em \mathcal{R}^1 .

A forma normal para uma família a um parâmetro (μ) de mapas unidimensionais que tem um ponto fixo não-hiperbólico $(x, \mu) = (0, 0)$, digamos $x \mapsto g(x, \mu) = a_0\mu + a_1x + a_2\mu^2 + a_3x^2 + a_4\mu x + a_5\mu^3 + a_6x^3 + \dots$, é uma outra tal família $x \mapsto f(x, \mu)$ tal que, embora quase todos os coeficientes a_i 's de f sejam nulos (os que não são iguais a zero são iguais a 1 ou a -1), as dinâmicas de f e g próximo de $(0, 0)$ são qualitativamente as mesmas.

- O que resta fazer para termos uma demonstração analítica de que, de fato, temos uma bifurcação de duplicação de período para (\mathbf{P}_π, f_{0c}) é (ver teorema do início da próxima subseção) separar a parte linear da parte não linear do MRDP. A partir de tal separação, como temos os autovalores e os autovetores da bifurcação, podemos obter a forma de Jordan \mathbf{J} e o MRDP fica

$$\begin{pmatrix} z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{termos não lineares} \end{pmatrix}.$$

Agora, usando uma equação funcional não linear adequada da Teoria da Variedade Central (ver [19], páginas 204-210), devemos obter uma forma normal $u \mapsto f(u, f_0)$ tal que, como a (4.2), satisfaz (ver [19], páginas 373-374):

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)} &= -1, \\ \left. \frac{\partial f^2}{\partial f_0} \right|_{(0,0)} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f^2}{\partial u^2} \right|_{(0,0)} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial f_0} \right|_{(0,0)} &\neq 0, \\ \left. \frac{\partial^3 f^2}{\partial u^3} \right|_{(0,0)} &\neq 0. \end{aligned}$$

Para tal forma trasladamos π para 0 e f_{0c} para a origem.

Na próxima subseção vamos usar a teoria da variedade central para fazer uma demonstração parcial de que, de fato, temos uma bifurcação de duplicação de período em (\mathbf{P}_π, f_{0c}) .

4.1.1 Dinâmica sobre a Variedade Central

Primeiramente vamos apresentar alguns resultados da Teoria da Variedade Central. Tais resultados podem ser encontrados em, por exemplo, [19], páginas 205 - 210.

Teorema da Variedade Central 4.1 *É possível escrever qualquer mapa n -dimensional de classe C^r (numa vizinhança suficientemente pequena da origem) na forma*

$$x \mapsto Ax + f(x, y, z), \quad (4.3)$$

$$y \mapsto By + g(x, y, z), \quad (4.4)$$

$$z \mapsto Cz + h(x, y, z), \quad (4.5)$$

ou

$$x_{n+1} = Ax_n + f(x_n, y_n, z_n),$$

$$y_{n+1} = By_n + g(x_n, y_n, z_n),$$

$$z_{n+1} = Cz_n + h(x_n, y_n, z_n),$$

onde $(x, y, z) \in \mathcal{R}^c \times \mathcal{R}^s \times \mathcal{R}^u$, $c + s + u = n$,

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad Df(0, 0, 0) = 0,$$

$$g(0, 0, 0) = 0, \quad Dg(0, 0, 0) = 0,$$

$$h(0, 0, 0) = 0, \quad Dh(0, 0, 0) = 0,$$

e f , g e h são de classe C^r ($r \geq 2$) numa vizinhança da origem.

A (respectivamente B , respectivamente C) é uma matriz $c \times c$ (respectivamente $s \times s$, respectivamente $u \times u$) cujos autovalores têm módulos iguais a (respectivamente menores do que, respectivamente maiores do que) 1.

Evidentemente $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ é um ponto fixo instável de (4.3-4.5), a menos que $u = 0$, sendo que, neste caso, a linearização é insuficiente para o estudo da estabilidade em torno de $(0, 0, 0)$.

Existe uma variedade central para (4.3-4.5) que pode ser representada localmente como um gráfico do seguinte modo

$$W^c(0) = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^c \times \mathcal{R}^s \times \mathcal{R}^u : y = h_1(x), z = h_2(x), h_i(0) = 0, Dh_i(0) = 0, i = 1, 2\}, \quad (4.6)$$

para x suficientemente pequeno.

A restrição de (4.3-4.5) a variedade (4.6) é, para w suficientemente pequeno, dada pelo mapa c -dimensional

$$w \mapsto Aw + f(w, h_1(w), h_2(w)). \quad (4.7)$$

Se $u = 0$ então (4.7) determina a dinâmica (o tipo de estabilidade) em torno da origem de (4.3-4.5).

Utilizando o fato de que (4.6) é invariante sob a dinâmica gerada por (4.3-4.5), obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + f(x_n, h_1(x_n), h_2(x_n)), \\ y_{n+1} &= h_1(x_{n+1}) = Bh_1(x_n) + g(x_n, h_1(x_n), h_2(x_n)), \\ z_{n+1} &= h_2(x_{n+1}) = Ch_2(x_n) + h(x_n, h_1(x_n), h_2(x_n)), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{N}_1(h_1(x)) = h_1(Ax + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Bh_1(x) - g(x, h_1(x), h_2(x)) = 0, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{N}_2(h_2(x)) = h_2(Ax + f(x, h_1(x), h_2(x))) - Ch_2(x) - h(x, h_1(x), h_2(x)) = 0. \quad (4.9)$$

Podemos, sem perda de generalidade, tomar uma aproximação de uma solução de (4.8-4.9) via uma expansão em série de potências, isto é, sejam $\phi_{1,2} : \mathcal{R}^c \mapsto \mathcal{R}^{s,u}$ mapas com $\phi_{1,2}(0) = 0$, $\phi'_{1,2}(0) = 0$ e $\mathcal{N}_{1,2}(\phi_{1,2}(x)) = \mathcal{O}(|x|^q)$ quando $x \rightarrow 0$ para algum $q > 1$. Daí $h_{1,2}(x) = \phi_{1,2}(x) + \mathcal{O}(|x|^q)$ quando $x \rightarrow 0$.

Agora é conveniente observar que nos cálculos abaixo foi utilizado o “software” Maple. Isto posto, inicialmente escreveremos o MRDP como em (4.3-4.5). Para tanto, fixaremos o parâmetro de controle em $f_{0c} \simeq 8,1104126$ e faremos a translação

$$\mathbf{P}_\pi \rightarrow (0, 0, 0, 0)$$

concomitantemente com a expansão de Taylor para o MRDP.

Assim, seja

$$\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{Z})$$

o MRDP como dado no capítulo 2, onde $\mathbf{Z} = (x_1, x_2, y_1, y_2)^t$ e $\mathbf{F}(\mathbf{P}_\pi) = \mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)^t$. Considere ainda que $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, onde as componentes de \mathbf{F} são dadas por

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{Z}) &= x_1 + M_{11}y_1 + M_{12}y_2 \pmod{2\pi}, \\ F_2(\mathbf{Z}) &= x_2 + M_{21}y_1 + M_{22}y_2 \pmod{2\pi}, \\ F_3(\mathbf{Z}) &= \frac{f_0}{\sqrt{2}} \sin F_1(\mathbf{Z}) + L_{11}y_1 + L_{12}y_2, \\ F_4(\mathbf{Z}) &= f_0 \sin F_2(\mathbf{Z}) + L_{21}y_1 + L_{22}y_2, \end{aligned}$$

sendo M_{ij} e L_{ij} as entradas das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{L} , respectivamente, $i, j = 1, 2$, como dadas no capítulo 2.

Agora faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\mathbf{W} = (u_1, u_2, v_1, v_2)^t = \mathbf{Z} - \mathbf{P}_\pi$$

concomitantemente com a expansão

$$\mathbf{P}_\pi + \mathbf{W} \mapsto \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W}) \doteq \mathbf{F}(\mathbf{P}_\pi + \mathbf{W}) = \mathbf{P}_\pi + \mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi) \cdot \mathbf{W} + \mathcal{O}(|\mathbf{W}|^2).$$

Daí temos $\tilde{\mathbf{F}}((0, 0, 0, 0)^t) = (0, 0, 0, 0)^t$ e

$$\tilde{\mathbf{F}}_j(\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F_j}{\partial Z_i}(\mathbf{P}_\pi) \cdot W_i + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^4 \frac{\partial^2 F_j}{\partial Z_{i_1} \partial Z_{i_2}}(\mathbf{P}_\pi) \cdot W_{i_1} W_{i_2} + \dots,$$

$j = 1, 2, 3, 4$, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W}) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & M_{11} & M_{12} \\ 0 & 1 & M_{21} & M_{22} \\ -\frac{f_0}{\sqrt{2}} & 0 & L_{11} - \frac{f_0}{\sqrt{2}} M_{11} & L_{12} - \frac{f_0}{\sqrt{2}} M_{12} \\ 0 & -f_0 & L_{21} - f_0 M_{21} & L_{22} - f_0 M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{f_0}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1^3 + 3M_{11}u_1^2v_1 + 3M_{12}u_1^2v_2 + 3M_{11}^2u_1v_1^2 + 3M_{12}^2u_1v_2^2 + 6M_{11}M_{12}u_1v_1v_2 + 3M_{11}^2M_{12}v_1^2v_2 + 3M_{11}M_{12}^2v_1v_2^2 + M_{11}^3v_1^3 + M_{12}^3v_2^3) \\ u_2^3 + 3M_{21}u_2^2v_1 + 3M_{22}u_2^2v_2 + 3M_{21}^2u_2v_1^2 + 3M_{22}^2u_2v_2^2 + 6M_{21}M_{22}u_2v_1v_2 + 3M_{21}^2M_{22}v_1^2v_2 + 3M_{21}M_{22}^2v_1v_2^2 + M_{21}^3v_1^3 + M_{22}^3v_2^3 \end{bmatrix} + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Considerando que

$$\mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,48596 & 0,21335 \\ 0 & 1 & 0,21335 & 0,69932 \\ -5,73493 & 0 & -2,54554 & -0,95096 \\ 0 & -8,11041 & -1,45778 & -5,15772 \end{pmatrix}$$

é a matriz da parte linear da expansão e usando um pouco de álgebra linear (considerando que a matriz formada pelos autovetores de $\mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi)$ é dada por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,17651 & 1,49479 & 1,45155 & 0,06284 \\ -0,04529 & -1,22614 & 0,72154 & 0,13362 \\ -0,90446 & -4,71523 & -3,45360 & -0,28647 \\ 0,40547 & 3,30040 & -0,16422 & -0,95601 \end{pmatrix},$$

onde, obviamente,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -6,29876 & 2,28573 & -2,19663 & 0,56367 \\ 0,64814 & -0,75190 & 0,12000 & -0,09845 \\ 0,81224 & 0,57100 & 0,16718 & 0,08310 \\ -0,57346 & -1,72440 & -0,54608 & -1,16109 \end{pmatrix}$$

representa a inversa de \mathbf{T}), temos que o MRDP passa a ser escrito como

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{W} \mapsto \underbrace{\widehat{\mathbf{F}}(w, x, y, z)^t}_{=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{W}} \doteq \mathbf{T}^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{W}) = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi)}_{=\mathbf{J}} \cdot \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{W} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{W}),^2$$

isto é,

$$(w, x, y, z)^t \mapsto \mathbf{J}(w, x, y, z)^t + \text{termos não lineares},$$

onde a forma de Jordan é dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,06188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,18037 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4,46101 \end{pmatrix},$$

e o primeiro termo não linear é dado por

$$(f(w, x, y, z), g_1(w, x, y, z), g_2(w, x, y, z), h(w, x, y, z))^t,$$

onde

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) = & 0,01851w^2x + 0,05077w^2y + 0,05222w^2z + 0,01011wx^2 + \\ & + 0,07796wy^2 + 0,12416wz^2 + 0,05180wxy + 0,04829wxz + \\ & + 0,17927wyz + 0,11242xyz + 0,01162w^3 + 0,00199x^3 + \\ & + 0,03600y^3 - 0,11509z^3 + 0,01239x^2y + 0,00726x^2z + \\ & + 0,04287xy^2 + 0,10740xz^2 + 0,09796y^2z + 0,02392yz^2, \end{aligned}$$

2

$$\mathbf{T}(w, x, y, z)^t = \begin{bmatrix} u_1 = 0,17651w + 1,49479x + 1,45155y + 0,06284z \\ u_2 = -0,04529w - 1,22614x + 0,72154y + 0,13362z \\ v_1 = -0,90446w - 4,71523x - 3,45360y - 0,28647z \\ v_2 = 0,40547w + 3,30040x - 0,16422y - 0,95601z \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{G}(\mathbf{W}) = \mathcal{O}(|\mathbf{W}|^2)$.

$$\begin{aligned}
g_1(w, x, y, z) = & -0,00105w^2x - 0,00270w^2y - 0,00252w^2z - 0,00062wx^2 - \\
& - 0,00447wy^2 - 0,01120wz^2 - 0,00258wxy - 0,00151wxz - \\
& - 0,01172wyz - 0,00937xyz - 0,00064w^3 - 0,00015x^3 - \\
& - 0,00177y^3 + 0,02565z^3 - 0,00047x^2y + 0,00055x^2z - \\
& - 0,00269xy^2 - 0,01326xz^2 - 0,00258y^2z + 0,01138yz^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(w, x, y, z) = & -0,00133w^2x - 0,00400w^2y - 0,00460w^2z - 0,00064wx^2 - \\
& - 0,00554wy^2 - 0,00123wz^2 - 0,00440wxy - 0,00577wxz - \\
& - 0,01005wyz - 0,00254xyz - 0,00087w^3 - 0,00008x^3 - \\
& - 0,00312y^3 - 0,02731z^3 - 0,00133x^2y - 0,00231x^2z - \\
& - 0,00261xy^2 + 0,00560xz^2 - 0,01261y^2z - 0,02545yz^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(w, x, y, z) = & 0,00378w^2x + 0,01403w^2y + 0,01943w^2z + 0,00114wx^2 + \\
& + 0,01533wy^2 - 0,05404wz^2 + 0,01760wxy + 0,03362wxz + \\
& + 0,00749wyz - 0,03417xyz + 0,00272w^3 - 0,00027x^3 + \\
& + 0,01283y^3 + 0,34387z^3 + 0,00703x^2y + 0,01991x^2z + \\
& + 0,00388xy^2 - 0,11554xz^2 + 0,07762y^2z + 0,24993yz^2.
\end{aligned}$$

Agora, considerando:

- $A = -1$,
- $B = \begin{pmatrix} -0,06188 & 0 \\ 0 & -0,18037 \end{pmatrix}$,
- $C = -4,46101$,
- as séries de potências $h_i = a_iw^2 + b_iw^3 + \mathcal{O}(w^4)$, $i = 1, 2, 3$, onde os a_i 's e b_i 's são coeficientes a determinar,

e resolvendo a equação funcional não linear (4.8-4.9)

$$(h_1, h_2)^t(Aw + f(w, h_1(w), h_2(w), h_3(w))) - B(h_1(w), h_2(w))^t$$

$$-(g_1, g_2)^t(w, h_1(w), h_2(w), h_3(w)) = (0, 0)^t,$$

$$h_3(Aw + f(w, h_1(w), h_2(w), h_3(w))) - Ch_3(w) - h(w, h_1(w), h_2(w), h_3(w)) = 0,$$

temos que o mapa restrito a variedade central ao longo da autodireção relacionada ao autovalor -1 em $f_0 \simeq 8,1104126$ é dada por (ver (4.7))

$$w \mapsto -w + 0,01161815371w^3 + \mathcal{O}(w^5). \quad (4.10)$$

Como estamos fixando o parâmetro $f_0 = f_{0c}$, por tal teoria, o termo de menor ordem associado a f_0 de uma forma normal para uma família de mapas unidimensionais a um parâmetro é “mudo”, isto é, é inexistente. Assim, temos uma forte evidência de que o mapa (4.10) representa a forma normal que acarreta uma bifurcação de duplicação de período com parâmetro fixado. (Compare (4.10) com (4.2)). É válido salientar que (4.10) não é a forma normal da restrição do MRDP a variedade central e sim a própria restrição. Mas a sua expressão é quase a forma normal.

4.2 Expoentes de Lyapunov Locais e o Mapa do Rotor Duplo Pulsado

4.2.1 Distribuições dos $\lambda_2(n)$

Considerando o MRDP, como visto no capítulo 3, podemos obter uma boa aproximação numérica para as distribuições de probabilidade dos expoentes de Lyapunov **locais**, isto é, a tempo finito, por meio de histogramas obtidos via um grande número de órbitas, calculando-se tais expoentes a cada n iteradas, passado o transiente, a partir de várias condições iniciais.

Em torno de $f_0 \simeq 8$ temos o limiar do hiper-caos onde, a medida que nos aproximamos de tal valor, a distribuição no formato de sino fica mais evidente, sendo que, neste caso, aproximadamente metade dos $\lambda_2(n)$ são positivos e metade são negativos.³ O par (\mathbf{P}_π, f_{0c}) , como determinado na seção anterior, representa o ponto de VDI máxima. Podemos ver um deslocamento das distribuições para valores positivos a medida que f_0 varia na vizinhança da transição para o hiper-caos. (Ver figura 4.4).

4.2.2 Variância

As distorções nas distribuições da figura 4.4, com respeito a Gaussiana, são responsáveis pelo comportamento altamente flutuante, antes do hiper-caos, do gráfico da variância σ_n^2 em função do forçamento f_0 , como pode ser visto na figura 4.5. Esta figura também ilustra

³Ver a propriedade **L2** dos $\lambda_k(n)$ do capítulo 3.

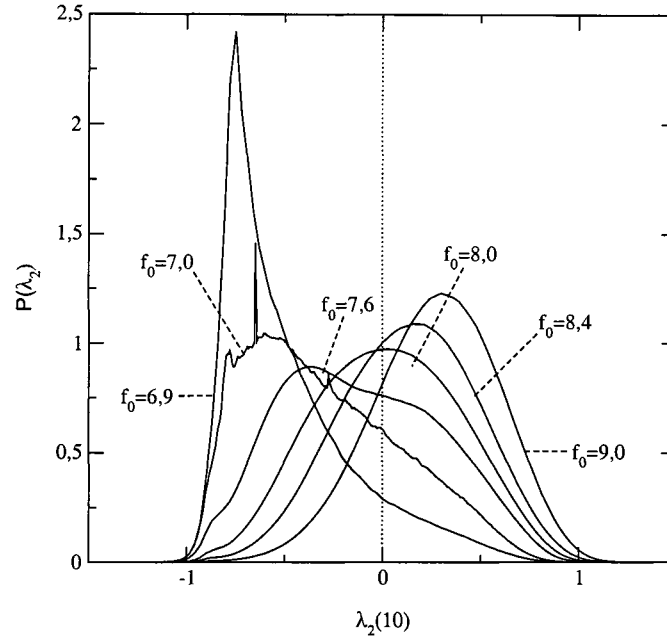


Figura 4.4: Algumas distribuições de probabilidade relativas aos $\lambda_2(10)$ para o MRDP obtidas para diferentes valores de f_0 . Cada distribuição foi gerada a partir de valores nas mesmas ordens de grandeza daqueles utilizados para gerar a figura 3.5.

que o gráfico é aproximadamente suave após tal ponto. No próximo capítulo veremos outros sistemas (com VDI) para os quais as distribuições dos $\lambda_2(n)$, além de serem aproximadamente Gaussianas, também se deslocam para valores positivos sem, no entanto, visíveis distorções na forma.

4.2.3 Médias

A figura 4.6 corrobora que a média dos expoentes de Lyapunov locais mais próximos de 0 cruzam o próprio 0 na vizinhança do hiper-caos. Tais médias, como antecipado na propriedade **L2** do capítulo 3, se ajustam aos expoentes de Lyapunov a tempo infinito $\lambda_k(\infty)$, $k = 1, 2, 3, 4$, como demonstra a figura 4.7 reproduzida de [12]. (Tal figura aparece aqui para apresentar uma simulação numérica que não calculamos, mas que tem suficiente autoridade para confirmar nossos cálculos).

Embora não tenhamos obtido (nem mesmo encontrado na literatura científica disponível

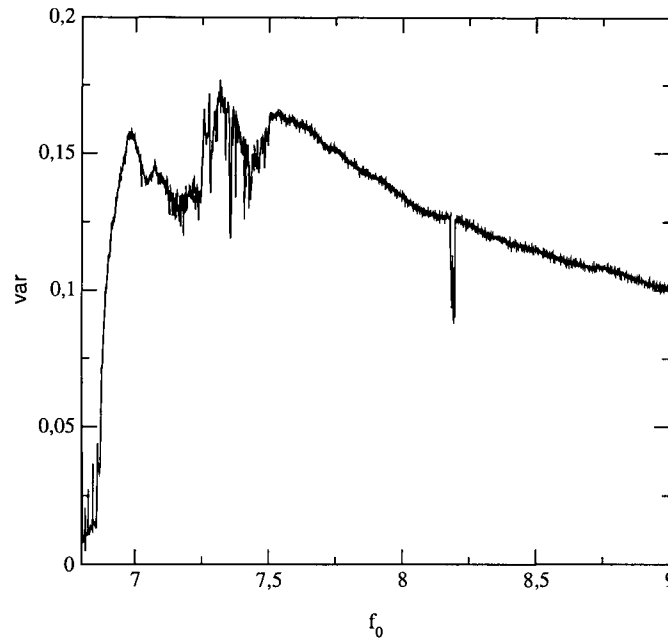


Figura 4.5: Variância relativa aos $\lambda_2(10)$ para o MRDP em função de f_0 . Tal diagrama reflete as distorções das distribuições para $\lambda_2(10)$ no intervalo entre (aproximadamente) -1 e 1 da figura 4.4.

sobre o assunto) uma demonstração de que a propriedade **L2** seja válida independente do tipo de distribuição (quer seja normal ou de qualquer outro tipo) que os expoentes de Lyapunov a tempo finito possuam, podemos inferir numericamente que tal resultado é verdadeiro via a concordância entre os gráficos das figuras 4.6 e 4.7, bem como o gráfico dos expoentes de Lyapunov **globais**, isto é, a tempo infinito, para o MRDP ilustrado em [16], bastante semelhante ao da figura 4.7, onde tais expoentes são calculados a partir de um número grande de órbitas (após longos transientes) e então são **obtidas as médias destes valores** utilizando o método descrito na referência [31]. Uma outra hipótese que reforça a propriedade **L2**, independente do tipo de distribuição que os expoentes de Lyapunov locais (como variáveis aleatórias) possuam, é que a propriedade **L5** foi obtida em [23] via expoentes de Lyapunov a tempo finito que apresentam distribuições completamente distorcidas, sem formas definidas, principalmente quando este “tempo finito” é muito pequeno.

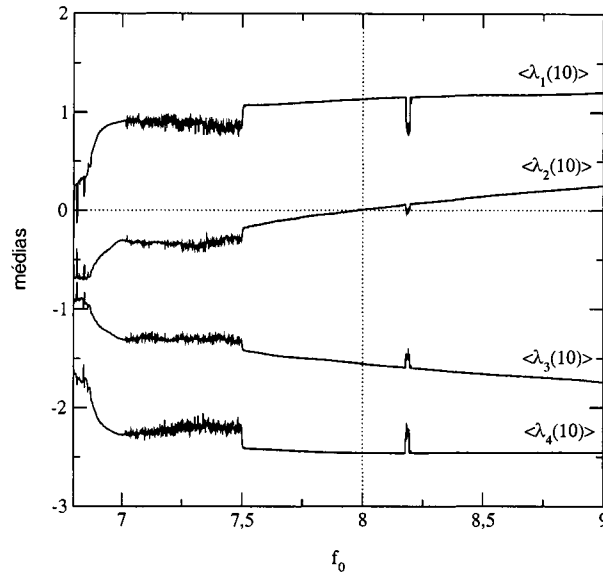


Figura 4.6: Médias dos expoentes de Lyapunov a tempo 10 para o MRDP em função de f_0 . $\langle \lambda_2(10) \rangle$ cruza 0 a uma taxa constante na vizinhança da transição para o hiper-caos.

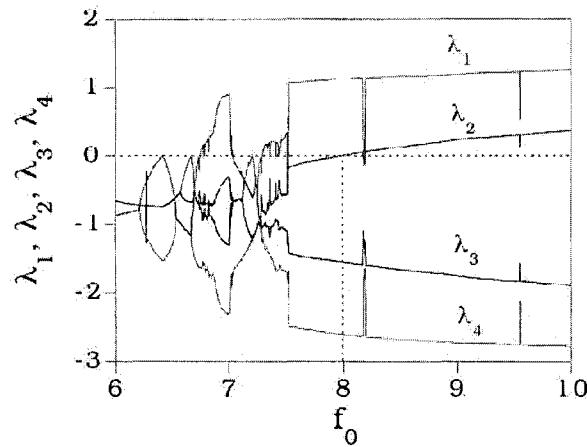


Figura 4.7: Expoentes de Lyapunov a tempo infinito para o MRDP em função de f_0 . Figura obtida por Lai, Grebogi e Kurths em [12].

4.2.4 Fração dos $\lambda_2(n)$ Positivos

Uma quantidade de interesse, em termos da caracterização da VDI, é a fração ϕ dos $\lambda_2(n)$ positivos.⁴ O cálculo numérico desta fração é simples: após calcularmos um dos $\lambda_2(n)$,

⁴Tal fração, por exemplo, funciona como um indicativo numérico para a determinação do limiar da VDI.

calculamos a soma do mesmo com a soma dos calculados anteriormente. Se tal expoente for positivo, calculamos a soma do mesmo com a soma dos outros positivos calculados anteriormente. Após termos executado tal procedimento para uma quantidade suficiente dos $\lambda_2(n)$, dividimos a última dessas somas pela primeira. Tal cálculo numérico pode ser visto na figura 4.8. Aqui, a transição para o hiper-caos é identificada com a fração positiva

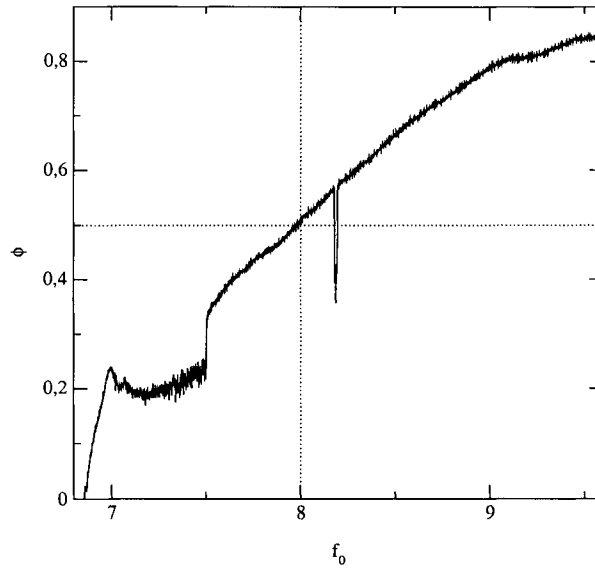


Figura 4.8: Fração dos $\lambda_2(10)$ positivos para o MRDP em função de f_0 . A transição para o hiper-caos é identificada com a fração positiva de metade dos $\lambda_2(10)$. Na figura 4.4, para tal valor, a distribuição é simétrica a, e com máximo na, reta $\lambda_2(10) = 0$. O limiar para a VDI ($f_0 \simeq 6,8$)⁵ não coincide com o do hiper-caos.

de metade dos $\lambda_2(10)$. Podemos ver que na figura 4.4, para tal valor, a distribuição é simétrica a, e com máximo na, reta $\lambda_2(10) = 0$. Na figura 4.8 ainda é visível que o limiar para a VDI (em $f_0 \approx 6,8$)⁵ não coincide com o do hiper-caos. No penúltimo capítulo vamos revelar o culpado por tal limiar.

⁵Como demonstrado no capítulo 3, VDI implica em flutuação dos expoentes de Lyapunov mais próximos de 0 em torno de 0. A Lógica Matemática nos diz que a negação da proposição anterior é a seguinte: Se não existe flutuação dos expoentes de Lyapunov mais próximos de 0 em torno de 0, então não existe VDI.

4.3 Tempo de Sombreamento

Nesta seção discutiremos a seguinte questão: Por quanto tempo as pseudo-trajetórias são válidas?

O que foi observado anteriormente pode ser quantificado via o conceito de *tempo de sombreamento*, definido como o intervalo de tempo τ durante o qual uma pseudo-trajetória é sombreada por uma trajetória verdadeira. Sauer e colaboradores (ver [21] e [32]) determinaram que o tempo de sombreamento médio de uma órbita típica, denotado por $\langle \tau \rangle$, escala com a cota superior do erro numérico em cada iterada, aqui denotada por δ , tal que

$$\langle \tau \rangle \propto \delta^{-h},$$

sendo que

$$h = \frac{2\langle \lambda_2(n) \rangle}{\sigma_1^2},$$

$$\sigma_1^2 = n\sigma_n^2.$$

Tal h é dito *expoente de hiperbolicidade*.

Consideremos agora uma aplicação da “fórmula” acima. Utilizando a figura 4.9, podemos ver que, para $f_0 \simeq 7,75$ temos $\log \langle \tau \rangle \simeq 1,25$, isto é, $\langle \tau \rangle \simeq 18$. A menos do erro numérico, isto concorda com a iteração da condição inicial $(5,5, 5,7, 0,0, 0,0)$ para $f_0 = 7,5$, em precisões simples e dupla, ilustrada na figura 3.2.

Por uma questão de completude, daremos uma idéia de como a expressão que calcula o tempo de sombreamento $\langle \tau \rangle$ é obtida. Para mais detalhes convém consultar as referências [21] e [33].

Quando, no conjunto caótico invariante, é calculado o log da distância ponto a ponto (aqui denotado por x) entre uma pseudo-trajetória típica e uma trajetória verdadeira correspondente,⁶ calculada com alta precisão usando a “técnica de refinamento” (ver [7]), e, considerando a lista numérica dos x como variáveis aleatórias, são obtidas suas distribuições para vários valores do parâmetro de controle, nota-se que tais distribuições são do tipo exponenciais derivando para a direita.

Para cada valor de f_0 , as pseudo-órbitas são obtidas adicionando-se artificialmente erros da ordem de $\delta = 10^{-16}, 10^{-14}, 10^{-12}$ as órbitas verdadeiras em cada iterada. As distribuições dos x sofrem um deslocamento da esquerda para a direita, para $\delta = 10^{-16}, 10^{-14}, 10^{-12}$, nessa ordem.

⁶Tais distâncias são ditas “distâncias de sombreamento”.

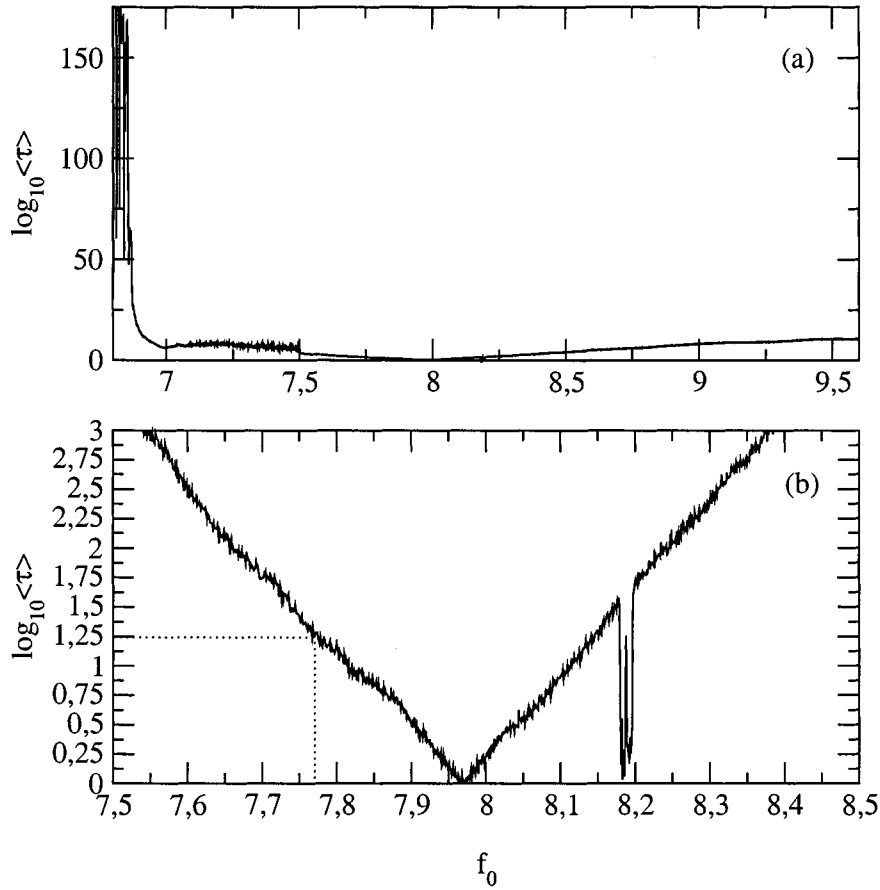


Figura 4.9: $\log\langle\tau\rangle$ em função de f_0 . A figura (b) é uma ampliação da figura (a) para $f_0 \in [7,5, 8,5]$.

Aumentando-se o parâmetro de controle a partir de um valor arbitrariamente próximo do valor onde a VDI é máxima, percebe-se que os expoentes das distribuições exponenciais aumentam, ainda que não se tenha as expressões analíticas das distribuições. Observa-se ainda que, próximo do valor do parâmetro onde a VDI é máxima, as distâncias de sombreamento experimentam várias (e crescentes) ordens de grandeza.

Como explicar tais distribuições dos x e o comportamento das mesmas a medida que variamos f_0 ?

Devido a VDI acarretar a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito em torno

de zero, e como tais expoentes estão relacionados com o aumento ou a diminuição das distâncias de sombreamento, é utilizada uma aproximação via um processo difusivo para explicar os aspectos quantitativos das distribuições exponenciais. Assim, inicialmente, é estabelecida a hipótese de que a distribuição exponencial dos x é resultado de um caminho aleatório enviesado (biased) com deriva para uma barreira refletora.⁷

Quando uma pseudo-órbita evolui em regiões hiperbólicas do atrator, o Lema do Sombreamento garante a existência de uma órbita verdadeira que a sombreia. Por outro lado, quando a pseudo-órbita entra numa região não-hiperbólica, devido ao aumento do número de direções instáveis, a trajetória verdadeira se afasta da pseudo-trajetória, sendo que o erro em cada iterada (majorado por δ) funciona como uma barreira refletora, já que a trajetória verdadeira nunca está a uma distância menor do que δ da pseudo-órbita.

O modelo difusivo usa os expoentes de Lyapunov a tempo finito (que flutuam em torno de zero) como uma inovação por iterada para se obter a distribuição exponencial dos x . Para tanto, considera-se a probabilidade de transição \mathcal{P} relativa a um processo difusivo contínuo dada pela equação de Kolmogorov

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + m \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x},$$

sendo que as inovações por iterada têm média $-m$ e variância σ^2 (ver [34]). σ^2 representa a taxa de difusão sendo dada pela dispersão dos expoentes de Lyapunov a tempo finito que flutuam em torno de zero. $-m < 0$ representa a deriva, já que parte dos expoentes de Lyapunov a tempo finito são positivos e os restantes são negativos. Assim, considerando as seguintes condições de contorno $\mathcal{P}(\infty) = (\partial \mathcal{P} / \partial x)(\infty) = 0$ (devido a deriva $-m < 0$), a solução de equilíbrio $\partial \mathcal{P} / \partial t = 0$ resulta numa distribuição exponencial

$$\mathcal{P}(x) = \frac{2m}{\sigma^2} e^{-2mx/\sigma^2}.$$

Em [21] e [33] pode ser visto que: (1) tal distribuição exponencial se ajusta muito bem as distribuições exponenciais dos x empiricamente calculadas, citadas no início desta argumentação; (2) as distâncias de sombreamento y , onde $x = \log y$, seguem uma distribuição tipo lei de potência da forma cy^{-2m/σ^2} (como uma função de δ); (3) a expressão para $\langle \tau \rangle$ resulta do uso de Transformadas de Laplace quando $y_\tau = 1$: trajetórias verdadeiras que sombreiam pseudo-órbitas existem, desde que as distâncias de sombreamento sejam pequenas se comparadas com o tamanho do atrator. Daí, iteradas do mapa entre “glitches”, onde

⁷Um caminho aleatório clássico está associado a uma distribuição gaussiana (tipo ruído branco). As distribuições exponenciais com deriva para a direita levaram a hipótese de um caminho aleatório enviesado com deriva.

“glitches” são iteradas em que órbitas verdadeiras deixam de sombrear pseudo-trajetórias, representam o mesmo que iteradas calculadas até que a distância de sombreamento atinga 1 ($y_\tau = 1$).

Em [21] tal modelo difusivo é estudado para o MRDP, enquanto que em [33] o estudo é feito para o “riddling map” (ver próximo capítulo).

Como conclusão deste capítulo relembremos que para o MRDP a VDI começa a acontecer para um valor do parâmetro de controle não maior do que 6,8, e que, a VDI é máxima para tal parâmetro em torno de 8. Em torno deste último valor, trajetórias numéricas (que modelam o sistema físico) são de pouca utilidade: qualquer uma tal pseudo-órbita não é sombreada por órbitas verdadeiras produzidas pelo sistema.

Capítulo 5

Variabilidade de Dimensão Instável e Bifurcações de Co-dimensão 1 para Mapas Bidimensionais

Neste capítulo¹ estudaremos VDI para mapas bidimensionais obtidos via acoplamento de mapas unidimensionais adequados. Veremos que com isso podemos construir mapas que apresentam VDI e adicionalmente estabelecer o “gatilho” que a acarreta.

Seja $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \rho)$, onde $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2$ e $\rho \in \mathcal{R}$, uma família de difeomorfismos a um parâmetro e Λ um conjunto caótico invariante por \mathbf{f} , isto é, $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) \in \Lambda$, $\forall n$, $\forall \mathbf{x} \in \Lambda$. Já vimos que um modo de Λ não ser hiperbólico é via VDI. Isto ocorre se, por exemplo, para algum valor de ρ existirem ao menos dois pontos fixos de \mathbf{f} em Λ que não tenham o mesmo número de direções instáveis, isto é, as variedades instáveis destes dois pontos fixos não têm a mesma dimensão. Para um conjunto adequado de valores do parâmetro, sejam $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Lambda$ tais pontos fixos satisfazendo $\mathbf{f}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}_i$, $i = 1, 2$, $d_1^u \neq d_2^u$ e $d_i^u = \dim W^u(\mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2$.

Seja ρ_c um valor crítico de ρ tal que, para $\rho < \rho_c$ temos $d_1^u = d_2^u$ (não existe VDI), e, para $\rho > \rho_c$ temos $d_2^u = d_1^u + 1$. Ainda considere que ρ varia numa vizinhança adequada de ρ_c . Neste caso definiremos que o *limiar da VDI em $\rho = \rho_c$ é devido a bifurcação de co-dimensão 1 do difeomorfismo \mathbf{f}* , no qual \mathbf{p}_2 torna-se instável numa dada direção enquanto \mathbf{p}_1 não muda sua estabilidade em qualquer direção.

A perda da estabilidade de \mathbf{p}_2 numa direção do \mathcal{R}^2 pode ocorrer de três modos (ver [19] sobre bifurcações de mapas). Seja $\mathbf{Df}(\mathbf{p})$ a matriz jacobiana de \mathbf{f} com entradas calculadas

¹Este capítulo reproduz, com ênfase na didática, grande parte do conteúdo de [35].

para o ponto fixo \mathbf{p} . Para $\rho = \rho_c$, definiremos que \mathbf{p} *tem autovalor* ξ se ξ for autovalor de $\mathbf{Df}_\rho(\mathbf{p})$. Os três tipos de bifurcações de co-dimensão 1 para $\rho = \rho_c$ que acarretam a VDI serão caracterizados via o autovalor de \mathbf{p} em $\rho = \rho_c$. $\mathbf{Df}_\rho(\mathbf{p})$ pode ter:

- (i) um único autovalor igual a $+1$;
- (ii) um único autovalor igual a -1 ;
- (iii) um par de autovalores complexos conjugados de módulo igual a 1;

Antes de prosseguirmos é importante enfatizar que tais bifurcações podem ocorrer para uma órbita periódica de período $q > 1$, digamos $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_q\}$. Neste caso as definições acima se mantêm trocando-se, respectivamente, \mathbf{f} e \mathbf{p} por \mathbf{f}^q e \mathbf{p}_i , $i = 1, \dots, q$.

Considere que \mathbf{f} pode ser reduzida a seguinte forma

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (5.1)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n, \rho), \quad (5.2)$$

tal que a dinâmica ao longo da direção x não depende da dinâmica ao longo da direção y . A jacobiana de mapas do tipo (5.1)-(5.2) é uma matriz triangular inferior e as auto-direções podem ser tomadas simplesmente como os eixos x e y , com autovalores ξ_x e ξ_y , respectivamente. Assumiremos que na direção do eixo x existe uma dinâmica fortemente caótica como a que existe para o mapa $\varphi(x) = 2x \pmod{2\pi}$. Daí obtemos um conjunto caótico invariante Λ mergulhado num espaço de fase bidimensional.

Um importante caso particular ocorre quando $g(x_n, y_n, \rho)$ tem apenas potências ímpares em y . Neste caso, devido a simetria $y \rightarrow -y$, a reta $y = 0$ (ou parte dela) é um subespaço invariante para o sistema e Λ está mergulhado neste subespaço invariante². Existe um número infinito de órbitas periódicas instáveis (OPIs) mergulhadas no conjunto caótico Λ . Na direção do eixo x , por construção, todas as OPIs serão instáveis, isto é, $|\xi_x| > 1$, pois estamos supondo que o mapa $\varphi(x)$ gera uma dinâmica fortemente caótica para todos os valores do parâmetro ρ que sejam de interesse. O conjunto invariante Λ pode ser (na média) transversalmente estável ou instável ao longo da direção vertical, sendo chamado de um atrator caótico ou uma sela caótica, dependendo da estabilidade transversal (ao longo da direção vertical) das OPIs mergulhadas em Λ :

atrator caótico $|\xi_y| < 1$ para um ponto de sela com dimensão instável igual a 1;

²Nos exemplos que veremos $X = \{(x, 0); x \in \text{Dom}\varphi\}$ será sempre invariante, com ou sem simetria. Também sempre teremos $\Lambda \subset X$.

sela caótica $|\xi_y| > 1$ para um repulsor com dimensão instável igual a 2;

Para mapas da forma (5.1)-(5.2) a VDI ocorre como resultado de uma bifurcação de co-dimensão um agindo na dinâmica transversal a Λ , transformando uma OPI transversalmente estável numa instável ou vice-versa. O limiar da VDI depende do valor que o autovalor ξ_y assume no ponto de bifurcação $\rho = \rho_c$. Seja $\mathbf{p} = (x = \chi, y = y^*)$ um ponto fixo instável mergulhado em Λ no qual ocorre tal bifurcação. Quando \mathbf{p} se torna um repulsor, tornam-se também todas as suas infinitas pré-imagens, assim gerando um conjunto de repulsores com medida de Lebesgue nula mergulhado em Λ , convivendo densamente com um conjunto de pontos de sela com medida de Lebesgue positiva. Trajetórias que passam perto desses repulsores recém criados caem em “línguas” (do inglês *tongues*) ancoradas nestes repulsores e são repelidas do conjunto caótico (ver figura 5.1). Após o limiar da

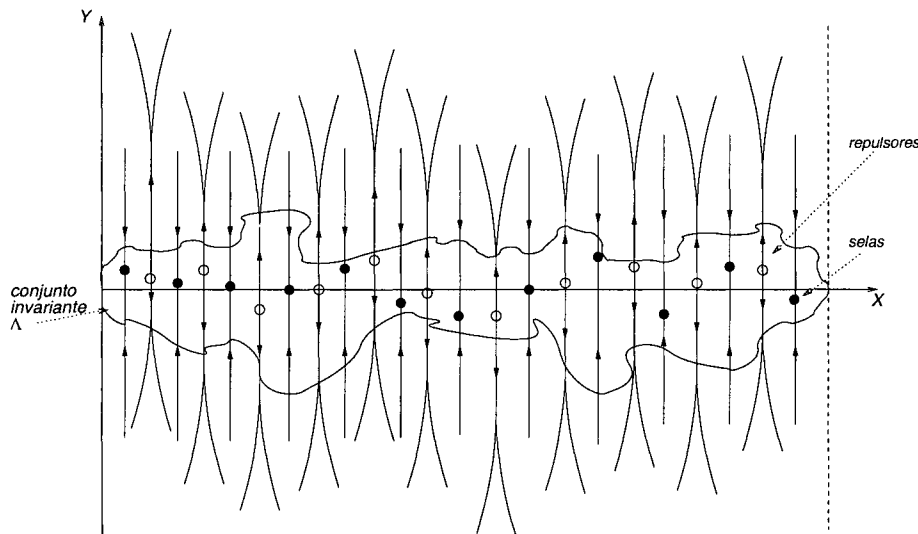


Figura 5.1: Pseudo-órbitas que visitam vizinhanças (suficientemente pequenas) dos repulsores caem numa armadilha ao entrarem em “línguas” (ancoradas nos repulsores) e divergem para o infinito.

VDI, a medida que variamos o parâmetro da bifurcação, outras OPIs também bifurcam, aumentando assim o número de repulsores no conjunto caótico e o efeito da VDI (ver [17]).

Já sabemos que uma maneira quantitativa de calcular a taxa média de atração ou repulsão de trajetórias a cada n passos na dinâmica transversal é computar os expoentes de Lyapunov a tempo n na direção do eixo y :

$$\lambda_y(x_0, y_0; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{\partial g(x_i, y_i, \rho)}{\partial y_i} \right|. \quad (5.3)$$

Em (5.3) é óbvio que $\lambda_y = \lambda_2$ de (3.3). Além disso também sabemos que tais expoentes são caracterizados por uma distribuição $P(\lambda_y(n))$ tal que $P(\lambda_y(n))d\lambda_y(n)$ é o número relativo de expoentes transversais a tempo n entre λ_y e $\lambda_y + d\lambda_y$ (ver também o [11]). Para n suficientemente grande tais distribuições são gaussianas (ver [36]). Contudo têm sido encontradas outras distribuições que melhor se ajustam a resultados numéricos (ver [37]). Após o limiar da VDI têm sido observado que tais distribuições começam a desenvolver “rabo” (tails) positivos, deslocando-se para valores positivos a medida que a VDI fica mais aguda. Quando a VDI atinge seu máximo, aproximadamente metade dos expoentes transversais a tempo finito são positivos, significando igual contribuição dos repulsores e pontos de sela (ver [17]). Neste caso o expoente de Lyapunov a tempo infinito na direção transversal, $\lambda_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_y(n)$, também se anula, e o conjunto caótico Λ perde a estabilidade transversal via uma bifurcação dita “blowout” (ver [38] e [39]).

Os possíveis tipos de bifurcações de co-dimensão um de mapas bidimensionais a um parâmetro podem ser descritas, usando a teoria da variedade central, via as formas normais ao longo da direção transversal calculadas em $\mathbf{p} = (\chi, y^*)$, e escritas como $z \mapsto g(z, \mu)$, onde $z \doteq y - y^*$ e $\mu \doteq \rho - \rho_c$. Daí, por construção, $g(0, 0) = 0$. No que se segue, trataremos os possíveis casos de acordo com o autovalor da bifurcação correspondente.

5.1 Bifurcações com Um Autovalor igual a +1

Neste caso $\frac{\partial g(z, \mu)}{\partial z} = 1$ (no ponto de bifurcação $(0, 0)$) e existem três possibilidades: as bifurcações *nó-sela* (ou *sela-nó*), *transcrítica* e *forquilha* (ver [19], páginas 358-371).

5.1.1 Bifurcação Forquilha

A forma normal que descreve a dinâmica transversal a Λ em $x = \chi$ é dada por (ver [19])

$$g(z, \mu) = z + \mu z \mp z^3, \quad (5.4)$$

onde o sinal de menos no termo cúbico se refere a bifurcação forquilha supercrítica. Existe um subespaço invariante em $y = z = 0$, onde reside o conjunto caótico Λ . Para $\mu < 0$ o ponto fixo do mapa (5.4) em $y = 0$ é transversalmente estável (um ponto de sela) e o limiar da VDI é causado por sua conversão num ponto fixo instável (um repulsor), com o consequente aparecimento de dois pontos de sela fora do conjunto invariante caótico Λ . O sinal de mais em (5.4) é para a bifurcação forquilha subcrítica, onde os dois repulsores fora

do Λ aproximam-se do ponto de sela em $z = 0$ a medida que μ tende a zero pela direita e, quando tais repulsores encontram-se no ponto de sela, este passa a ser um repulsor, bem como todas as suas pré-imagens.

Nos dois casos anteriores o diagrama de bifurcação no plano $\mu - z$ apresenta duas curvas de pontos fixos passando pelo ponto de bifurcação $(0, 0)$: uma das curvas é uma reta e existe em ambos os lados de $\mu = 0$. A outra curva existe em apenas um dos subplanos determinados pela reta $\mu = 0$. Assim, as condições adicionais para uma bifurcação forquilha ocorrer em $(0, 0)$ são (ver [19], página 370):

$$\left. \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = 0, \left. \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2} \right|_{(0,0)} = 0, \left. \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z \partial \mu} \right|_{(0,0)} \neq 0, \left. \frac{\partial^3 g(z, \mu)}{\partial z^3} \right|_{(0,0)} \neq 0. \quad (5.5)$$

Na figura 5.2 temos as curvas de pontos fixos no plano $\mu - z$ relativas ao (a) sinal $-$ de (5.4) (bifurcação forquilha supercrítica) e ao (b) sinal $+$ de (5.4) (bifurcação forquilha subcrítica).

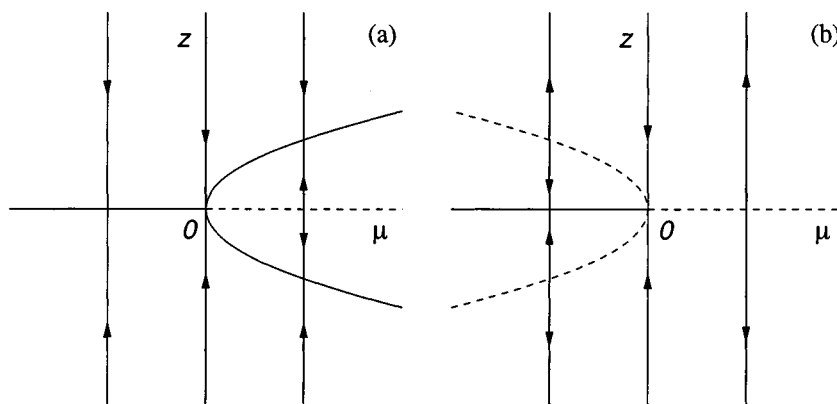


Figura 5.2: (a) Bifurcação forquilha supercrítica; (b) subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).

A bifurcação forquilha é o mecanismo pelo qual a VDI ocorre no mapa “riddling” (ver [40])

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), x \in [0, 1] \quad (5.6)$$

$$y_{n+1} = \epsilon + r \exp[-b(x_n - \chi)^2] y_n + y_n^3, \quad (5.7)$$

onde o primeiro destes é o conhecido mapa logístico, sendo que $a = 4$ é tal que existe uma dinâmica fortemente caótica no espaço invariante $y = 0$, $\chi = 1 - (1/a) = 0,75$ é um ponto fixo instável mergulhado em Λ , e, $\epsilon = 0$ e $b > 0$ são mantidos fixos. Para $x = \chi$ a equação (5.7) se reduz a forma normal (5.4) onde $\mu = r - 1$. O limiar da VDI ocorre

em $r = r_c = 1$ e, a medida que r cresce a partir de r_c , as distribuições dos expoentes de Lyapunov transversais a tempo finito (ver figura 5.3) se deslocam para valores positivos

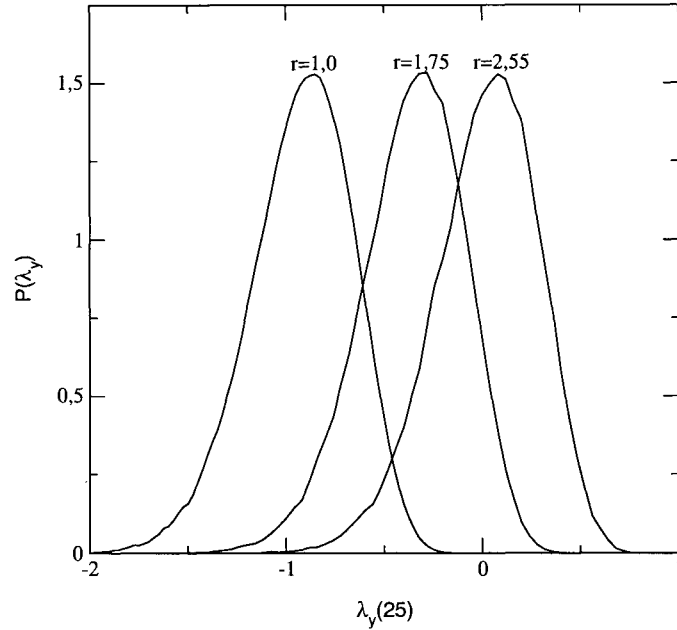


Figura 5.3: Distribuição de probabilidade dos expoentes de Lyapunov transversais a tempo 25, $P(\lambda_y, 25)$, para o mapa riddling com $a = 4,0$, $b = 5,0$, e (a) $r = 1,0$; (b) $r = 1,75$; (c) $r = 2,55$.

de λ_y . Note ainda que o atrator caótico em $y = 0$ perde estabilidade transversal em $r \approx 2,55$. Observamos que, após o aparecimento da VDI, o conjunto invariante passa a ser uma sela caótica.

5.1.2 Bifurcação Transcrítica

A forma normal para a dinâmica transversal no ponto de bifurcação $(0, 0)$ é agora dada por

$$g(z, \mu) = z + \mu z \mp z^2. \quad (5.8)$$

Devido ao termo quadrático em z , embora a reta $y = 0$ continue sendo um subespaço invariante, o conjunto caótico pode não estar mergulhado no mesmo (embora no exemplo

que será dado a seguir, $\Lambda \subset X = \{(x, 0); x \in \text{Dom}\varphi\}^3$. Para $\mu < 0$ (> 0) o ponto fixo em $z = 0$ é estável (instável), enquanto que o outro ponto fixo em $z \neq 0$ é instável (estável) quando $\mu < 0$ (> 0). O sinal de menos (mais) se refere a bifurcação transcritical supercrítica (subcrítica) em $\mu = \mu_c = 0$.

No diagrama de bifurcação, ou no plano $\mu - z$, existem duas curvas de pontos fixos passando pela origem e existindo em ambos os lados da reta $\mu = 0$. Daí, além das condições usuais $g(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial g(z, \mu)}{\partial z}\bigg|_{(0,0)} = 1$, valem também as seguintes condições:

$$\frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu}\bigg|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z \partial \mu}\bigg|_{(0,0)} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2}\bigg|_{(0,0)} \neq 0. \quad (5.9)$$

Na figura 5.4 temos as curvas de pontos fixos no plano $\mu - z$ relativas ao (a) sinal $-$ de (5.8) (bifurcação transcritical supercrítica) e ao (b) sinal $+$ de (5.8) (bifurcação transcritical subcrítica).

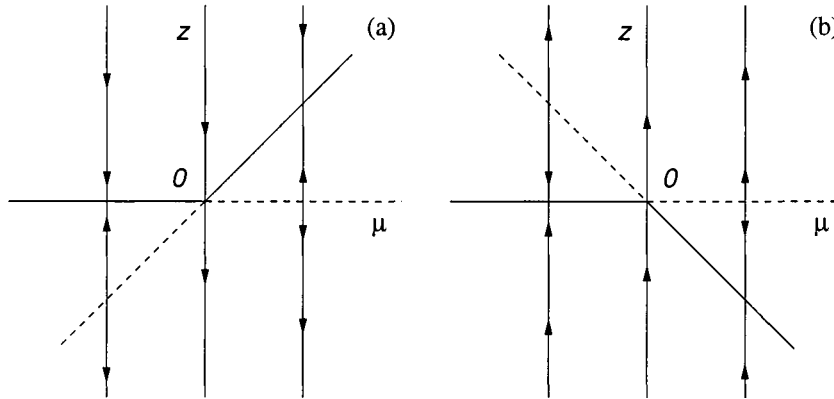


Figura 5.4: (a) Bifurcação transcritical supercrítica; (b) subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).

Um exemplo deste tipo de transição é o seguinte mapa bidimensional definido no cilindro topológico $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^1$

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{2\pi}, \quad (5.10)$$

$$y_{n+1} = (y_n + \mu y_n - y_n^2) \cos x_n, \quad (5.11)$$

onde $\chi = 0$ é o ponto fixo instável mergulhado no círculo invariante $y = 0$. O mapa (5.11) se reduz a forma normal (5.8) quando $x = 0$, sendo $(0, 0)$ o ponto de bifurcação. O limiar da VDI em $\mu = 0$ pode ser visto na distribuição dos expoentes de Lyapunov transversais a tempo 15 ilustrada na figura 5.5. Note ainda que o atrator caótico perde estabilidade transversal em $\mu \approx 1,0$.

³ver equação (5.1).

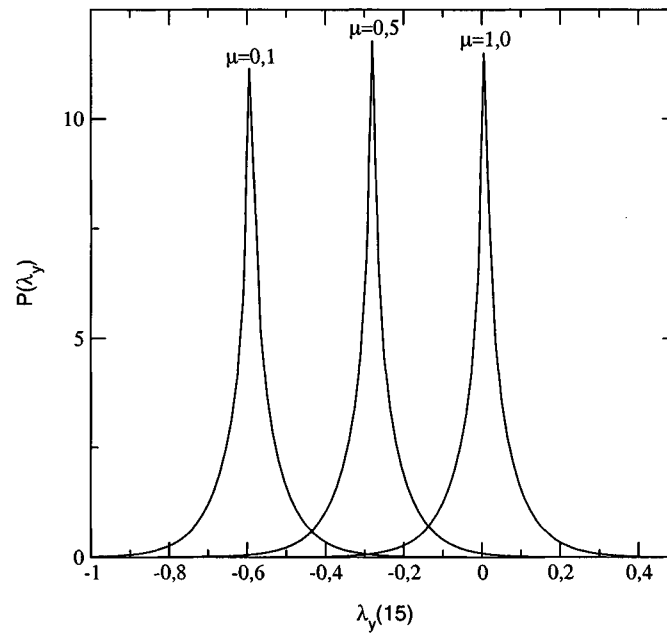


Figura 5.5: Distribuição de probabilidade $P(\lambda_y, 15)$ para os expoentes de Lyapunov transversais a tempo 15 para o mapa $(x, y) \mapsto (2x \pmod{2\pi}, (y + \mu y - y^2) \cos x)$ para $\mu = 0,1, \mu = 0,5$ e $\mu = 1,0$

5.1.3 Bifurcação Tangente

Neste caso a dinâmica transversal no ponto de bifurcação $(0, 0)$ é governada pela forma normal

$$g(z, \mu) = z + \mu \mp z^2. \quad (5.12)$$

Para o sinal $- (+)$ em (5.12) e $\mu < 0 (> 0)$ não existe qualquer ponto fixo e, em $\mu = 0$, surge um par de pontos fixos, um estável e outro instável, para $\mu > 0 (< 0)$. Existe uma única curva de pontos fixos no plano $\mu - z$ passando pelo ponto de bifurcação. Tal curva se localiza apenas no lado direito (o sinal de menos em (5.12)) ou apenas no lado esquerdo (o sinal de mais em (5.12)) do eixo $z = 0$. No primeiro caso a bifurcação tangente também é chamada de bifurcação nó-sela. No segundo, de bifurcação sela-nó. Em qualquer caso, as condições adicionais para uma bifurcação tangente são

$$\left. \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2} \right|_{(0,0)} \neq 0. \quad (5.13)$$

Na figura 5.6 temos as curvas de pontos fixos no plano $\mu - z$ relativas ao (a) sinal $-$ de (5.12) (bifurcação tangente supercrítica) e ao (b) sinal $+$ de (5.12) (bifurcação tangente subcrítica).

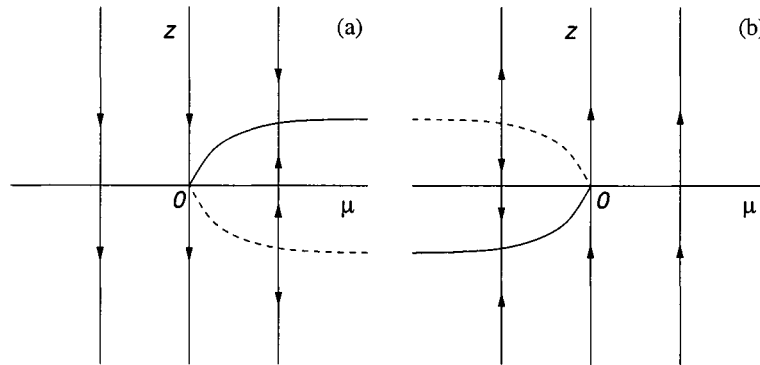


Figura 5.6: (a) Bifurcação tangente supercrítica; (b) subcrítica. Linhas cheias (traçadas) significam pontos fixos estáveis (instáveis).

No caso da bifurcação tangente, a VDI ocorre, rigorosamente, apenas no ponto de bifurcação. Isto porque antes (sinal $-$) ou depois (sinal $+$) da bifurcação não existe qualquer ponto fixo. Assim chamamos tal caso de um caso atípico de VDI.

Quando o ponto fixo $y = y^*$ desaparece como resultado de uma bifurcação tangente, o conjunto invariante sofre perfurações numa escala fina, onde os buracos que daí surgem têm tamanhos proporcionais a μ . Um exemplo deste caso foi estudado em [41], aonde uma versão modificada do mapa de Kaplan-Yorke foi considerada (ver [42]). Um outro exemplo é a versão não simétrica do mapa (5.6-5.7), onde um parâmetro que quebra a simetria é adicionado à dinâmica transversal (ver [43]).

5.2 Bifurcação com Um Autovalor igual a -1

O caso $\frac{\partial g(z, \mu)}{\partial z} = -1$ (no ponto de bifurcação $(0, 0)$) caracteriza a *bifurcação de duplicação de período* (ver [19], páginas 371-374). Como já vimos para o MRDP (estudado nos capítulos anteriores), tal bifurcação ocorre na transição para o hiper-caos, onde a VDI é máxima, em $f_0 \simeq 8,11$. Também, no conhecido diagrama que ilustra a “cascata” de duplicações de período para o mapa logístico (como ilustrado na figura 5.7), cada bifurcação é, obviamente, uma bifurcação de duplicação de período.

A escolha comum para a forma normal para a dinâmica transversal é

$$g(z, \mu) = -z - \mu z + z^3. \quad (5.14)$$

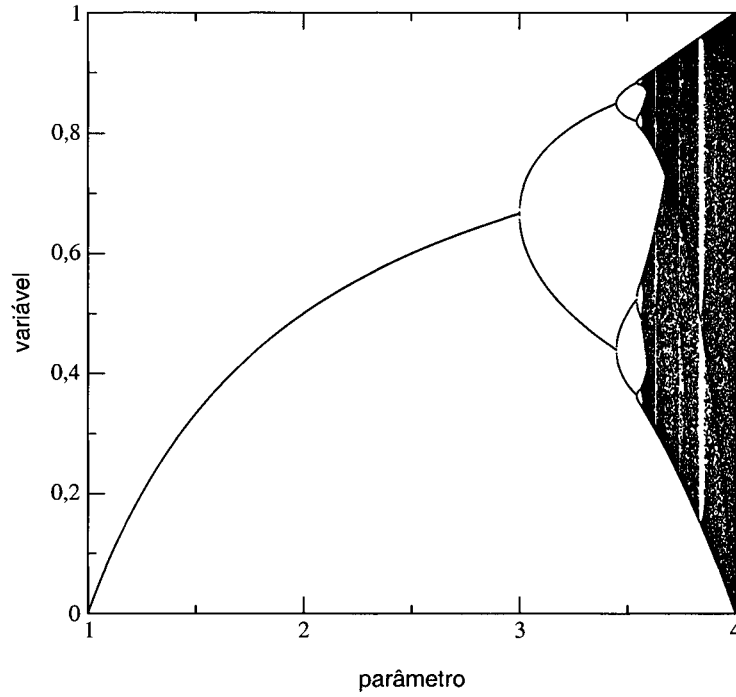


Figura 5.7: Cascata de duplicações de período para o mapa logístico.

Em $\mu = 0$ o ponto fixo estável ($z = 0$) torna-se instável, a segunda iterada do mapa ($g^2(z, \mu)$) acarreta uma bifurcação forquilha (autovalor igual a $+1$) e surge uma órbita estável de período 2. Daí, as condições para tal bifurcação ocorrer são

$$g(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial z} \right|_{(0,0)} = -1, \quad (5.15)$$

$$\left. \frac{\partial g^2(z, \mu)}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 g^2(z, \mu)}{\partial z^2} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 g^2(z, \mu)}{\partial z \partial \mu} \right|_{(0,0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial^3 g^2(z, \mu)}{\partial z^3} \right|_{(0,0)} \neq 0. \quad (5.16)$$

Como no caso da bifurcação forquilha, este caso é também caracterizado por uma forma normal simétrica ao longo da direção transversal e $y = 0$ é um espaço invariante contendo o conjunto caótico Λ . Um exemplo em $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^1$ é

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{2\pi}, \quad (5.17)$$

$$y_{n+1} = (-y_n - \mu y_n + y_n^3) \cos x_n, \quad (5.18)$$

com $(x = 0, y = 0)$ sendo o ponto fixo instável que perde a estabilidade transversal no limiar da VDI em $\mu = 0$. Isto é confirmado pela estatística dos expoentes de Lyapunov a tempo

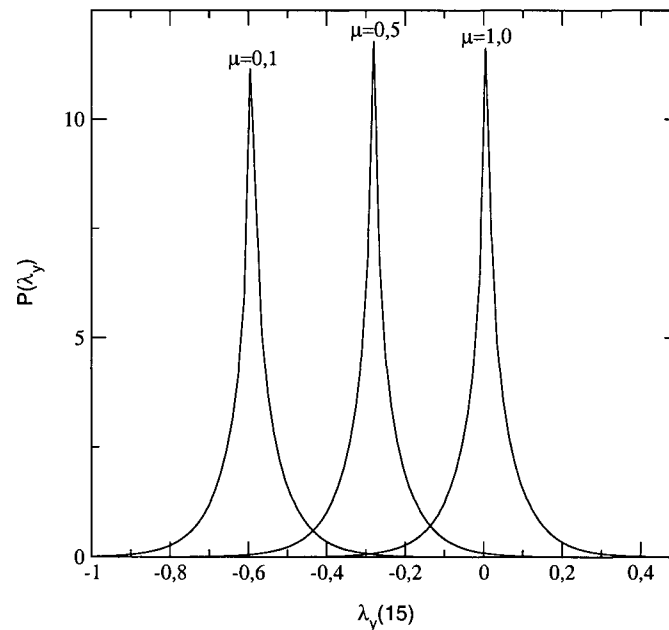


Figura 5.8: $P(\lambda_y, 15)$ é a distribuição de probabilidade dos expoentes de Lyapunov a tempo 15 para o mapa $(x, y) \mapsto (2x \pmod{2\pi}, (-y - \mu y + y^3)(\cos x))$ para $\mu = 0,1$, $\mu = 0,5$ e $\mu = 1,0$

finito ilustrada na figura 5.8. A bifurcação “blowout”, que indica a perda de estabilidade transversal de Λ , ocorre em $\mu \approx 1$.

Como visto neste capítulo, podemos determinar que algumas bifurcações de co-dimensão um podem ser o gatilho para o aparecimento da VDI em mapas bidimensionais, construídos acoplando-se mapas unidimensionais, sendo que um destes tem uma dinâmica caótica e o outro mapa (responsável pela dinâmica transversal), além de ter o parâmetro de controle, pode assumir uma determinada forma normal (através de um ponto fixo do primeiro mapa) associada a uma dada bifurcação.

Capítulo 6

Limiar da Variabilidade de Dimensão Instável para o Mapa do Rotor Duplo Pulsado

Neste penúltimo capítulo, determinamos o gatilho para a VDI no MRDP (ou pelo menos indicamos um fortíssimo candidato para tanto).

Em primeiro lugar é válido enfatizar que, a menos do erro numérico, alguns resultados são próximos mas não coincidentes. Por exemplo:

- Quando calculamos para qual condição inicial e para qual valor de f_0 numa vizinhança adequada de $f_0 \simeq 8$ -valor obtido numericamente para a VDI máxima, isto é, $\lambda_2(\infty) \approx 0$ (ver, por exemplo, [10], [11] e [12]) - conseguimos autovalor -1 para a jacobiana do MRDP, obtemos a condição inicial $\mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)$ e $f_0 \approx 8,11041126$. O fato de $8,11041126$ não ser exatamente 8 é devido ao erro numérico;
- Via simulação numérica obtemos que, considerando o MRDP, para $f_0 \approx 7,75$ temos $\log\langle\tau\rangle \simeq 1,25$, isto é, o tempo de sombreamento médio é $\langle\tau\rangle \simeq 18$. Assim, a menos de erro numérico, isto coincide com a iteração da condição inicial $(5,5, 5,7, 0,0, 0,0)$ para $f_0 = 7,5$, em precisões simples e dupla, que fizemos no capítulo 3. De qualquer forma, o fato do gráfico de $\log\langle\tau\rangle$ dependendo de f_0 não ser exato não prejudica o comportamento qualitativo do mesmo.

Assim, quando obtivemos no capítulo 4 que a fração dos Lyapunov a tempo finito positivos tem seu limiar em $f_0 \simeq 6,8$ (ver figura 4.8) e já que o caos unidimensional tem seu limiar

em $f_0 \simeq 6,75$, conjecturamos que talvez o limiar da VDI para o MRDP não fosse via um tipo de bifurcação mais via o próprio limiar do caos unidimensional.

De fato, considerando o capítulo 2 sabemos que:

- Para $0 < f_0 < 2\pi$ temos apenas quatro pontos fixos

$$(x_{1*}, x_{2*}, y_{1*}, y_{2*}) = \mathbf{P}_0 = (0, 0, 0, 0), (0, \pi, 0, 0), (\pi, 0, 0, 0), \mathbf{P}_\pi.$$

Estes são os únicos pontos fixos que pertencem a variedade invariante $y_1 = y_2 = 0$, qualquer que seja o valor de f_0 ;

- Para $2\pi \leq f_0 < 2\pi\sqrt{2}$, além dos quatro pontos fixos anteriores, temos mais 8 pontos fixos. Estes são

$$(x_{1*}, x_{2*}, y_{1*}, y_{2*}) = (0, x_{2*}^{[(1,2);1]}), (0, x_{2*}^{[(1,2);2]}), (\pi, x_{2*}^{[(1,2);3]}), (\pi, x_{2*}^{[(1,2);4]}),$$

onde $x_{2*} = \arcsen \frac{2\pi}{f_0}$, e

$$(x_{1*}, x_{2*}, y_{1*}, y_{2*}) = (0, x_{2*}^{[(-1,-2);1]}), (0, x_{2*}^{[(-1,-2);2]}), (\pi, x_{2*}^{[(-1,-2);3]}), (\pi, x_{2*}^{[(-1,-2);4]}),$$

onde $x_{2*} = \arcsen -\frac{2\pi}{f_0}$.

- Os únicos pontos fixos estáveis para o MRDP são $[(0, 0); 4]$ (isto é, \mathbf{P}_π) para $f_0 \in (0, 4,27\dots)$, e, $[(1, 2); 4]$ e $[(-1, -2); 1]$ para $f_0 \in (2\pi, 7,01\dots)$. (Ver [16]);
- Por outro lado o limiar do caos unidimensional ocorre em $f_0 \simeq 6,75 \in (2\pi, 7,01\dots)$, que é um ponto de acumulação de duplicações de período resultante da bifurcação do ponto fixo estável \mathbf{P}_π em $f_0 \simeq 4,27\dots$;
- Logo após $f_0 \simeq 6,75$ já estamos no atrator caótico e temos 12 pontos fixos. Destes, 10 são instáveis (inclusive o recente instável \mathbf{P}_π com $d^u = 1$) e dois são estáveis ($d^u = 0$) até $7,01\dots$. \mathbf{P}_π ganha mais uma direção instável ($d^u = 2$) no limiar do caos multidimensional (VDI máxima) em $f_0 \simeq 8$.

Acontece que o ponto \mathbf{P}_0 , antes (e depois) do limiar do caos unidimensional, já tinha $d^u = 2$ como pode ser visto na figura 6.1.

\mathbf{P}_π e \mathbf{P}_0 residem na variedade invariante $y_1 = y_2 = 0$ e têm $d^u = 1, 2$, respectivamente, antes e depois do limiar do caos unidimensional ($f_0 \simeq 6,75$). Antes de termos um conjunto invariante caótico não tem sentido falar em VDI. Mas após $f_0 \simeq 6,75$ temos um tal conjunto em que dois de seus pontos fixos têm um número diferente de direções instáveis ($d^u = 1, 2$).

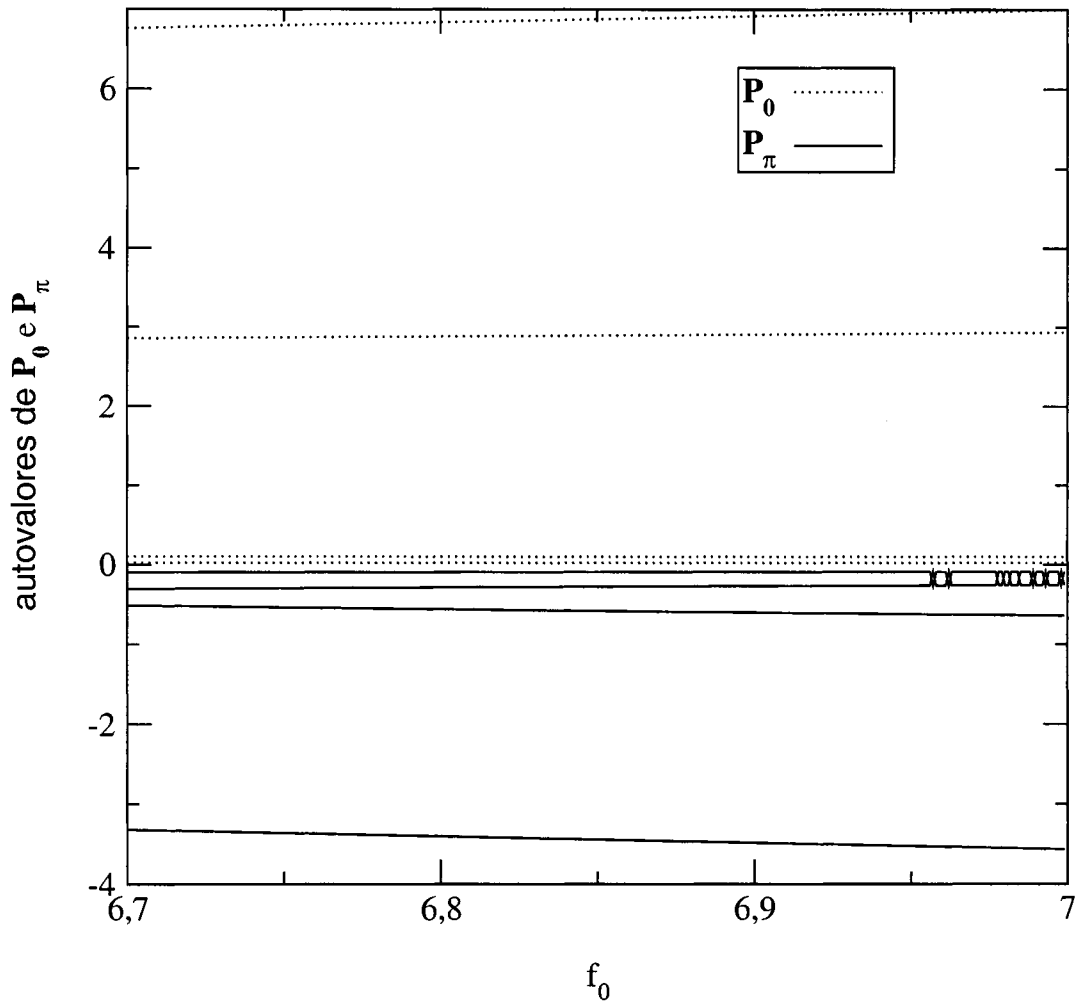


Figura 6.1: Autovalores da jacobiana do MRDP para $\mathbf{P}_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $\mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)$ com $f_0 \in [6,7, 7,0]$.

Ainda, o gráfico da fração dos expoentes de Lyapunov positivos indica que a VDI tem o seu limiar próximo de $f_0 \simeq 6,75$ (ver figura 4.8).

No capítulo anterior fizemos a classificação da VDI (relativamente ao seu limiar) para mapas bidimensionais via tipos de bifurcações de co-dimensão um. O que fizemos lá foi,

por construção, exibir mapas bidimensionais que possuem tais gatilhos para a VDI. O valor disto, em semelhança ao que foi feito em [44]¹ para sistemas caóticos acoplados, reside no esforço de uma tentativa de classificação do mecanismo de aparecimento da VDI. O que estamos vendo neste capítulo é que existe um mapa 4-dimensional cujo mecanismo é o limiar do caos unidimensional.

¹Neste artigo, o aumento da intensidade da VDI é medido via o aumento do número de órbitas periódicas instáveis no atrator.

Capítulo 7

Conclusões

Neste capítulo vamos fazer uma revisão dos resultados obtidos e indicar possíveis rotas para o prosseguimento da pesquisa relativa a este trabalho.

O rotor duplo pulsado é um sistema físico similar ao pêndulo duplo sem gravidade. Obtivemos o mapa do rotor duplo pulsado (MRDP) e um modo de determinar seus pontos fixos a medida que o parâmetro do mapa (f_0) varia.

O MRDP apresenta Variabilidade de Dimensão Instável (VDI), onde VDI significa que existe um conjunto denso de pontos em seu atrator caótico com um número diferente de direções instáveis. A VDI corrompe a validade de órbitas numéricas que modelam o MRDP (e de qualquer outro sistema físico que a apresente), sendo que, próximo do valor do parâmetro onde a VDI é máxima, as trajetórias numéricas são de pouca ou nenhuma utilidade.

Alguns conceitos e resultados matemáticos (numéricos ou analíticos) foram estabelecidos, onde os mais importantes são os seguintes: (1) Um conjunto invariante caótico ter a sua hiperbolicidade quebrada via VDI significa que trajetórias (numéricas) no atrator deixam de representar órbitas verdadeiras do sistema, sendo que o problema se torna mais agudo quando a VDI é máxima; (2) Na literatura científica disponível, o que tem detectado a VDI é a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito mais próximos de 0 em torno do próprio 0. Contudo é possível demonstrar matematicamente apenas que VDI acarreta tal flutuação; (3) Apresentamos um algoritmo para calcular os expoentes de Lyapunov a tempo finito; (4) Para o MRDP a VDI é máxima quando ocorre hiper-caos (mais de um expoente de Lyapunov a tempo finito positivo) via uma bifurcação de duplicação de período; (5) Para o MRDP o limiar da VDI ocorre concomitantemente com o limiar do caos unidimensional; (6) Existem famílias de mapas bidimensionais a um parâmetro onde a

VDI tem o seu limiar via bifurcações de co-dimensão um, isto é, o início da VDI ocorre em pontos fixos que perdem estabilidade numa dada direção associada a um autovalor igual a $+1$ ou a -1 .

Vamos considerar brevemente alguns dos pontos levantados. Devido a um conhecimento prévio de que o MRDP apresenta VDI em torno de $f_0 = 8$, iniciamos nossa investigação calculando os autovalores da jacobiana do MRDP ($\mathbf{DF}(-)$), obtida para vários pontos fixos ao variarmos f_0 numa vizinhança adequada de 8, obtendo que, para $f_0 \simeq 8,11$, $\mathbf{DF}(\pi, \pi, 0, 0)$ tem apenas um autovalor igual a -1 , os outros tem módulos diferentes de 1. Todos os outros pontos fixos que existem para f_0 numa vizinhança adequada de 8 estão associados a autovalores que possuem módulos diferentes de 1. Isto implica numa bifurcação de duplicação de período em $\mathbf{P}_\pi = (\pi, \pi, 0, 0)$. Contudo a confirmação deste fato exige a obtenção da forma normal da restrição do MRDP a variedade central tangente ao autovetor de $\mathbf{DF}(\mathbf{P}_\pi)$ relativo ao autovalor -1 . Obtemos tal restrição para $f_0 \simeq 8,11$.

Para o MRDP a VDI começa a acontecer para um valor do parâmetro de controle não maior do que 6,8. Tal resultado foi obtido pois os pontos fixos \mathbf{P}_π e $(0, 0, 0, 0)$ residem na variedade invariante $y_1 = y_2 = 0$ e têm $d^u = 1, 2$, respectivamente, antes e depois do limiar do caos unidimensional ($f_0 \simeq 6,75$). Antes de termos um conjunto invariante caótico não tem sentido falar em VDI. Mas após $f_0 \simeq 6,75$ temos um tal conjunto em que dois de seus pontos fixos tem um número diferente de direções instáveis ($d^u = 1, 2$). Ainda, o gráfico da fração dos expoentes de Lyapunov positivos indica que a VDI tem o seu limiar próximo de $f_0 \simeq 6,75$.

Por fim, determinamos que algumas bifurcações de co-dimensão um podem ser o gatilho para o aparecimento da VDI em mapas bidimensionais, construídos acoplando-se determinados mapas unidimensionais, sendo que um destes tem uma dinâmica caótica e o outro mapa (responsável pela dinâmica transversal), além de ter o parâmetro de controle, pode assumir uma determinada forma normal (através de um ponto fixo do primeiro mapa) associada a uma tal bifurcação.

7.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Para concluir este trabalho, indicaremos alguns problemas nos quais estamos trabalhando ou que pretendemos trabalhar. Por exemplo, em analogia ao que fizemos no capítulo 5, quando acoplamos dois mapas unidimensionais adequados para estudar o gatilho da VDI via bifurcações de co-dimensão um, estamos em busca de mapas mais simples (bidimensionais), construídos via acoplamento, que apresentem o mesmo tipo de gatilho para a VDI que o

MRDP, isto é, o limiar do caos unidimensional.

A técnica utilizada para obtermos a restrição do MRDP à variedade central pode ser também aplicada se incluirmos o parâmetro como uma nova variável independente (ver [19]). Estamos a calcular a forma normal de uma família de mapas unidimensionais a um parâmetro (de fato) para f_0 variando em torno de 8,11.

Uma outra frente de trabalho é a obtenção de uma demonstração matemática de que a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito em torno de zero implica em VDI, ou a obtenção de um contra-exemplo de um mapa em que tais expoentes flutuem em torno de zero mas que não ocorra VDI. Caso a segunda possibilidade seja satisfeita, podemos tentar obter hipóteses adicionais que, juntamente com a flutuação dos expoentes de Lyapunov a tempo finito em torno de zero, impliquem em VDI.

Em relação aos expoentes de Lyapunov a tempo n , podemos ainda tentar demonstrar analiticamente a lei de potência satisfeita por momentos em torno da média em função de n , como estabelecida no capítulo 3.

Bibliografia

- [1] Bowen, R., “ ω -limit sets for Axiom A diffeomorphisms”, *J. Diff. Equations* **18** (1975), p. 333-339.
- [2] Anosov, D. V., “Geodesic flows and closed Riemannian manifolds with negative curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **90**(1967), p. 1.
- [3] Katok, A. e Hasselblatt, B., *Introduction to The Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995).
- [4] Grebogi, C., Poon, L., Sauer, T., Yorke, J. A. e Auerbach, D., “Shadowability of chaotic dynamical systems”, *Handbook of Dynamical Systems*, Vol. **2**, Cap. 7, Elsevier Science (2002), p. 313.
- [5] Grebogi, C., Hammel, S. e Yorke, J. A., “Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?”, *J. Complexity* **3** (1987), p. 136-145.
- [6] Hammel, S., Yorke, J. A. e Grebogi, C., “Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits”, *Bull. Am. Math. Soc.* **19** (1988), p. 465-470.
- [7] Grebogi, C., Hammel, S., Yorke, J. A. e Sauer, T., “Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: containment and refinement”, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990), p. 1527-1530.
- [8] Sauer, T. e Yorke, J. A., “Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems”, *Nonlinearity* **4** (1991), p. 961-979.
- [9] Abraham, R. e Smale, S., “Nongenericity of Ω -stability, global analysis I”, *Proc. Symp. Pure Math. Soc. (AMS)* **14** (1970), p. 5-8.
- [10] Dawson, S., Grebogi, C., Sauer, T. e Yorke, J. A., “Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero”, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), p. 1927-1930.

- [11] Kostelich, E., Kan, I., Grebogi, C., Ott, E. e Yorke, J., "Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems", *Physica D* **109** (1997), p. 81-90.
- [12] Lai, Y.-C., Grebogi, C. e Kurths, J., "Modeling of deterministic chaotic systems", *Phys. Rev. E* **59** (1999), p. 2907-2910.
- [13] Pearson, D., *Mathematical and Computer Modelling* **34** (2001), p. 813.
- [14] Viana, R. L., Pinto, S. E. de S., Barbosa, J. R. R. e Grebogi, C., "Pseudo-deterministic chaotic systems", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. **11** (2003), p. 1-19.
- [15] Davidchack, R. e Lai, Y.-C., "Characterization of transition to chaos with multiple positive Lyapunov exponents by unstable periodic orbits", *Phys. Lett. A* **270** (2000), p. 308-313.
- [16] Romeiras, F.J., Grebogi, C., Ott, E. e Dayawansa, W. P., "Controlling chaotic dynamical systems", *Physica D* **58** (1992), p. 165-192.
- [17] Lai, Y.-C. e Grebogi, C., "Obstruction to deterministic modeling of chaotic systems with invariant subspace", *Int. J. Bif. and Chaos* **10** (2000), p. 683-693.
- [18] Smale, S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), p. 747-817.
- [19] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag(1990).
- [20] Sinai, Ya., "Gibbs measures in ergodic theory", *Russ. Math. Surv.* **27** (1972), p. 21-69.
- [21] Sauer, T., Grebogi, C. e Yorke, J., "How long do numerical chaotic solutions remain valid?", *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), p. 59-62.
- [22] Ruelle, D., *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Cambridge University Press (1989).
- [23] Abarbanel, H. D. I., Brown, R. e Kennel, M. B., "Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor", *J. Nonlinear Sci.*, Vol. **1** (1991), p. 175-199.
- [24] Goldhirsch, I., Sulem, P-L. e Orzag, S. A., "Stability and Lyapunov Stability of Dynamical Systems: A Differential Approach and a Numerical Method", *Physica D* **27** (1986), p. 311.

- [25] Grassberger, P. e Procaccia, I., “Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach”, *Physica D* **13** (1984), p. 34.
- [26] Grassberger, P., Badii, R. e Politi, A., “Scaling Laws for Invariant Measures on Hyperbolic and Non-Hyperbolic Invariant Attractors”, *J. Stat. Phys.* **51** (1988), p. 135.
- [27] Anteneodo, C., “Statistics of finite-time Lyapunov exponents in the Ulam map”, a ser publicado.
- [28] Eckmann, J.-P. e Ruelle, D., “Ergodic theory of chaos and strange attractors”, *Reviews of Modern Physics* Vol. **57** (1985), p. 617-656.
- [29] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. e Flannery, B. F., *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press (1995).
- [30] Gulick, D., *Directions in Chaos*, McGraw Hill (1990).
- [31] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A. e Strelcyn, J.-M., “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2: Numerical application”, *Meccanica* **15** (1980), p. 21.
- [32] Sauer, T., “Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems”, *Phys. Rev. E* **65** (2002), 036220.
- [33] Viana, R. L., Pinto, S. E. de S. e Grebogi, C., “Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability”, *Phys. Rev. E* **66** (2002), p. 046213-1-9.
- [34] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York (1957).
- [35] Viana, R. L., Barbosa, J. R. R. e Grebogi, C., “Unstable dimension variability and codimension one bifurcations of two-dimensional maps”, *Physics Letters A*, **321** (2004), p. 244-251.
- [36] Fujisaka, H., “Statistical dynamics generated by fluctuations of local Lyapunov exponents”, *Prog. Theor. Phys.* **70** (1983), p. 1264.
- [37] Anteneodo, C., Pinto, S. E. de S., Batista, A. M. e Viana, R. L., “Analytical results for coupled maps lattices with long-range interactions”, *Phys. Rev. E* **68**(2003), 045202(R).

- [38] Ashwin, P., Buescu, J. e Stewart, I., "Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators", *Phys. Lett. A* **193** (1994), p. 126-139.
- [39] Ashwin, P., Buescu, J. e Stewart, I., "From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability", *Nonlinearity* **9** (1996), p. 703-737.
- [40] Lai, Y.-C., Grebogi, C., Yorke, J. e Venkataramani, S. C., "Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996), p. 55-58.
- [41] Viana, R. L. e Grebogi, C., "Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems", *Phys. Rev. E* **62**(2000), p. 462-468.
- [42] Grebogi, C., Ott, E. e Yorke, J., "Fractal Basin Boundaries, Long-Lived Chaotic Transients, and Unstable-Unstable Pair Bifurcation", *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983), p. 935-938.
- [43] Viana, R. L. e Grebogi, C., "Riddled basins and unstable dimension variability in chaotic systems with and without symmetry", *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**(2001), p. 2689-2698.
- [44] Barreto, E. e So, P., "Mechanisms for the Development of Unstable Dimension Variability and the Breakdown of Shadowing in Coupled Chaotic Systems", *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), p. 2490-2493.



PSEUDO-DETERMINISTIC CHAOTIC SYSTEMS

R. L. VIANA, S. E. DE S. PINTO and J. R. R. BARBOSA*

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná,
Caixa Postal 19081, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brasil*

C. GREBOGI

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66318, 05315-970, São Paulo, São Paulo, Brasil*

Received December 12, 2002; Revised February 3, 2003

We call a chaotic dynamical system pseudo-deterministic when it does not produce numerical, or pseudo-trajectories that stay close, or shadow chaotic true trajectories, even though the model equations are strictly deterministic. In this case, single chaotic trajectories may not be meaningful, and only statistical predictions, at best, could be drawn on the model, like in a stochastic system. The dynamical reason for this behavior is nonhyperbolicity characterized either by tangencies of stable and unstable manifolds or by the presence of periodic orbits embedded in a chaotic invariant set with a different number of unstable directions. We emphasize herewith the latter by studying a low-dimensional discrete-time model in which the phenomenon appears due to a saddle-repeller bifurcation. We also investigate the behavior of the finite-time Lyapunov exponents for the system, which quantifies this type of nonhyperbolicity as a system parameter evolves past a critical value. We argue that the effect of unstable dimension variability is more intense when the invariant chaotic set of the system loses transversal stability through a blowout bifurcation.

Keywords: Chaotic systems; hyperbolic systems; shadowing; Lyapunov.

1. Introduction

(...) “We conclude this discussion by mentioning what seems to be an interesting issue: the loss of hyperbolicity due to the existence of fixed points embedded in the attractor that have a number of unstable directions (that is, eigenvalues with magnitude bigger than one) different from the number of unstable directions of the attractor (that is, positive Lyapunov exponents)” (quoted from [Romeiras *et al.*, 1992]).

The extreme sensitiveness to initial conditions displayed by chaotic systems often leads to a puzzling question: should we believe the numerical

chaotic trajectories obtained when using a computer? Are these trajectories “real”, in the sense that they emulate actual chaotic orbits of the system? If so, to what extent can we assess the goodness of the numerical trajectories [Grebogi *et al.*, 1990]? The answers to these questions are, to a large extent, within the realm of shadowability theory [Grebogi *et al.*, 1987, 1988a]. Loosely speaking, a numerically generated chaotic trajectory is said to shadow a “true” chaotic trajectory if the former stays uniformly close to the latter and *vice versa* [Grebogi *et al.*, 2002]. The shadowing of numerical trajectories, for a reasonable timespan, is a minimum requirement for a meaningful computer simulation of a physical process. This obviously

*Permanent Address: Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, PR, Brasil.

does not preclude other equally important prerequisites of a more epistemological nature, like the validity of the model proposed for describing the physical phenomenon, or the correctness of the assumptions on which the model is based. However, the shadowability requirement for a chaotic trajectory is one of the most difficult to be fulfilled since it is strongly based on the hyperbolicity of the dynamics [Sauer & Yorke, 1991].

Most dynamical systems of physical, biological and technological interest are not hyperbolic, so the lack of shadowability seems to haunt the credibility of numerical simulations of chaotic processes used by scientists and engineers in their activities. In this paper, we deal with the limits of shadowability theory, investigating chaotic dynamical systems whose numerical trajectories do not typically have the shadowing property, i.e. the existence of true trajectories in their neighborhood. Hence these trajectories are not meaningful if taken only by themselves, although, sometimes, valid conclusions could be drawn based on a statistical treatment from assemblies of such trajectories, like averages and fluctuations [Lai et al., 1999a; Sauer, 2002]. So, they could yield at best the same kind of information expected from a stochastic system, in spite of the fact that the dynamical system trajectories are governed by strictly deterministic model equations. This is the reason we are calling them *pseudo-deterministic* [Viana & Grebogi, 2000].

The breakdown of shadowability for a pseudo-deterministic dynamical system occurs in a rather strong way, in the sense that the time a computer-generated trajectory stays close to an actual chaotic one is too short for most applications. From the mathematical point of view, this severe breakdown of shadowability stems from a strong form of nonhyperbolicity, that has been called *unstable dimension variability*, or UDV for short [Romeiras et al., 1992; Dawson et al., 1994]. In this case, unstable periodic orbits embedded in a chaotic invariant set, such as a chaotic attractor, have different numbers of unstable directions. For a discrete-time map, this means that the number of eigenvalues with moduli greater than unity is different for periodic orbits in the chaotic invariant set. This violates the continuous splitting between stable and unstable directions along a trajectory, which is a fundamental property of hyperbolic sets [Guckenheimer & Holmes, 1983]. Since the sets of points with different unstable dimensions are, apparently, densely interwoven in a

chaotic invariant set, UDV leads to a shadowability breakdown [Lai & Grebogi, 2000a].

Although it may seem at first that UDV is nothing but a mathematical pathology, unlikely to be found in real dynamical systems, it turns out that it has been identified in many models of physically interesting situations [Dawson et al., 1994]. In particular, there is numerical evidence and theoretical arguments showing that coupled chains of oscillators exhibit UDV for a wide range of coupling strengths [Lai et al., 1999b]. This should call the attention of applied scientists or engineers for the potentially crucial questions related to the shadowability properties of the model that they are numerically investigating. The main goal of this paper is to survey the fundamental results, as well as to present a detailed study of a case example in which UDV has been shown analytically and numerically to occur. Throughout the text, we refer to the pertinent literature for more precise statements as well as for the technical details of the proofs [Grebogi et al., 2002].

The rest of this paper is organized as follows: in Sec. 2 we present some basic definitions, emphasizing the concepts of hyperbolicity of invariant sets. Section 3 aims to present basic ideas in shadowability theory. Section 4 is devoted to a discussion of UDV, and Sec. 5 works out a case study in which UDV occurs in a two-dimensional map with an invariant subspace. Numerical procedures to detect and quantify UDV are described in Sec. 6. Section 7 treats a kind of intermittent chaotic bursting induced by UDV. The last section contains our conclusions.

2. Basic Definitions

We shall outline some basic definitions which are used throughout the paper. Discrete time mappings are chosen, bearing in mind that continuous time flows may also be described by them, if they are invertible, using Poincaré sections. Let $\mathbf{f} : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ be a diffeomorphism $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m$, possessing an invariant set Ω , such that if $\mathbf{x} \in \Omega$, any subsequent forward or backward iterate of \mathbf{x} remains in Ω . The invariant set Ω is called hyperbolic if the tangent space at a point \mathbf{x} of Ω , denoted as $T_{\mathbf{x}}$, may be decomposed as the direct sum [Guckenheimer & Holmes, 1983]

$$T_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}}^u \oplus E_{\mathbf{x}}^s, \quad (1)$$

where E_x^u and E_x^s are the unstable and stable subspaces, respectively, having the following properties:

- (i) The decomposition (1) varies *continuously* with $\mathbf{x} \in \Omega$, and it is invariant under the action of the tangent map such that the unstable and stable subspaces are consistent under the dynamics of the tangent map \mathbf{Df} .

$$\mathbf{Df}(E_x^u) = E_{f(x)}^u, \quad (2)$$

$$\mathbf{Df}(E_x^s) = E_{f(x)}^s; \quad (3)$$

- (ii) There exist constants $K > 0$ and $0 < \rho < 1$, such that

$$\|\mathbf{Df}^n(\mathbf{x})\mathbf{y}\| < K\rho^n\|\mathbf{y}\| \quad \text{if } \mathbf{y} \in E_x^s, \quad (4)$$

$$\|\mathbf{Df}^{-n}(\mathbf{x})\mathbf{y}\| < K\rho^n\|\mathbf{y}\| \quad \text{if } \mathbf{y} \in E_x^u, \quad (5)$$

meaning that vectors in a small neighborhood of E_x^s (E_x^u), under the forward (backward) iterations of the tangent map \mathbf{Df} , approach any $\mathbf{x} \in \Omega$ at a uniform rate ρ .

The *stable (unstable) dimension* at a point $\mathbf{x} \in \Omega$ is the dimension of the corresponding stable (unstable) subspace $d^s = \dim E_x^s$ ($d^u = \dim E_x^u$). Since $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ is a diffeomorphism, $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ is an isomorphism, and $\dim E_x^{u,s} = \dim E_{f(x)}^{u,s}$, i.e. the stable and unstable dimensions do not change along a trajectory belonging to a hyperbolic set Ω . For this invariant set Ω of the nonlinear map $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, the stable, $W^s(\mathbf{x})$, and the unstable, $W^u(\mathbf{x})$, manifolds of the fixed point $\mathbf{x} \in \Omega$ are defined as [Devaney, 1989]:

$$W^s(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m : \mathbf{f}^n(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \text{ if } n \rightarrow \infty\}, \quad (6)$$

$$W^u(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^m : \mathbf{f}^{-n}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \text{ if } n \rightarrow \infty\}, \quad (7)$$

respectively.

Due to the local manifold theorem [Wiggins, 1990] for a hyperbolic C^r -diffeomorphism, there exist stable and unstable invariant manifolds, and they are tangent to the stable and unstable invariant subspaces of the tangent map $\mathbf{Df}(\mathbf{x})$ at the fixed points \mathbf{x} embedded in Ω . Moreover, in hyperbolic systems the unstable and stable manifolds must intersect transversely, i.e. the angle between them is bounded away from zero. As a consequence, homoclinic or heteroclinic tangencies between the manifolds break the hyperbolicity of the invariant set Ω [Grebogi *et al.*, 1983]. There has been also recognized the *structural stability* of hyperbolic sets: the dynamics on them is topologically the same under

small bounded perturbations of the map $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ [Palis & de Melo, 1982].

The existence of bifurcations in the dynamics, as a system parameter is varied, restricts the applicability of the hyperbolicity concept to a few cases, like axiom-A systems [Ruelle, 1989]. Most dynamical systems of physical and technological interest are nonhyperbolic, most likely due to the existence of homoclinic tangencies, but also because of a failing in the continuous direct-sum splitting (1) between stable and unstable subspaces in every point of the invariant set. The latter is the key issue addressed in this paper.

3. Shadowing Theory in a Nutshell

An interesting numerical experiment that can be made using the Hénon map $(x, y) \mapsto (1 - 1.4x^2 + y, 0.3x)$ (which has a chaotic attractor [Benedicks & Carleson, 1991]) is the computation of the first hundred iterates from an initial condition, say $(0, 0)$, by using both single and double precision accuracies, the difference in accuracy being of the order 10^{-14} [Gulick, 1990]. It turns out that in less than 50 iterates, the trajectories obtained from single and double precision accuracy are far apart at a distance comparable to the size of the chaotic attractor. How can one trust the validity of such computer-generated trajectories?

The results of shadowing theory [Grebogi *et al.*, 1990; Anosov, 1967; Bowen, 1975; Katok & Hasselblatt, 1995] guide us to assess the validity of chaotic trajectories in face of dynamical difficulties arising from the breaking of hyperbolicity. If there is continuous shadowability of trajectories, even though a computer-generated trajectory may eventually depart with time from a “true” chaotic trajectory which is the goal of the simulation, there exists another fiducial trajectory that shadows, or “stays close to”, the computer-generated trajectory for the time-span of interest. This “true” chaotic orbit may not be the one we have sought for, since it will start from a generally different initial condition, but this fact does not matter for many applications. These shadowing orbits are thus reliable for, say, computations of long-time averages such as entropies and dimensions [Grassberger *et al.*, 1989].

3.1. Definitions

In what follows, we will cast these heuristic arguments in a more formal context. Let $\mathbf{f} : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ be a diffeomorphism, that may also represent a

Poincaré time- T map of a nonautonomous flow. Suppose that $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{R}^m$ represents the current state of the system, thus $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ is the “true” state after a time T [Poon *et al.*, 1994]. If this map comes, for example, from the numerical integration of some system of first-order ordinary differential equations, we have to use some numerical integrator like the Runge–Kutta or Bulirsch–Stoer methods. There are basically two sources of numerical error in such a procedure: (i) the time discretization process itself; and (ii) the finite-precision accuracy due to roundoff errors.

Both kinds of errors can be reduced but not eliminated at all, generating a discrepancy between the numerical result, which we denote \mathbf{z}_1 , and the expected or “true” state $\mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$ after a time T . The characteristic error is usually bounded so that $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)\| < \delta$, where $\delta > 0$ is supposed to be a small number, and $\|\cdot\|$ stands for the Euclidean norm in \mathcal{R}^m . In this case we say that \mathbf{z}_0 and \mathbf{z}_1 are points of a δ -pseudo-trajectory of the map \mathbf{f} . In general, $\{\mathbf{z}_n\}_{n=0}^N = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N\}$, are points of a δ -pseudo-trajectory if [Grebogi *et al.*, 1988a] $\|\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{f}(\mathbf{z}_n)\| < \delta$, for $n = 0, 1, \dots, N-1$.

On the other hand, leaving aside for a moment the issue of numerical integration, the existence theorem for differential equations [Arnold, 1978; Guckenheimer & Holmes, 1983] warrants that there exists a “true” chaotic trajectory of length $N+1$ for the map \mathbf{f} comprising of the points $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, such that $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. We say that a “true” trajectory $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^N$ ε -shadows a δ -pseudo trajectory $\{\mathbf{z}_n\}_{n=0}^N$ if there is a $\varepsilon > 0$ such that [Grebogi *et al.*, 2002] $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}_n\| < \varepsilon$, for $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Let $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_N\}$ be a pseudo-trajectory and $\mathbf{E} = \{\mathbf{z}_1 - \mathbf{f}(\mathbf{z}_0), \dots, \mathbf{z}_N - \mathbf{f}(\mathbf{z}_{N-1})\}$ be the related error vector. A “true” trajectory $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N\}$ is then related to the null error vector $\mathbf{0}$. If we can continuously deform the pseudo-trajectory to the true one, there exists an error function $\mathbf{F} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{E}$, such that $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{E})$ goes from \mathbf{Z} to \mathbf{X} continuously as \mathbf{E} goes to $\mathbf{0}$. In this case the pseudo-trajectory $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_N\}$ is said to be *continuously-shadowable* [Poon *et al.*, 1994].

A direct numerical method to test these conditions for shadowability uses the concept of *brittleness*, which is, for a pseudo-trajectory, the ratio between the shadowing distance and the one-step error due to computer roundoff and/or truncation procedure $\mathcal{B} = \max_n(\|\mathbf{z}_n - \mathbf{x}_n\|/\delta)$, and a necessary

condition for continuous shadowability is that the product of the brittleness and the magnitude of the error vector \mathbf{E} of the pseudo-trajectory be smaller than the attractor size [Grebogi *et al.*, 1990, 2002].

3.2. Shadowing in hyperbolic and nonhyperbolic systems

Anosov [1967] and Bowen [1975] proved that, for hyperbolic systems like axiom-A diffeomorphisms [Ruelle, 1989], pseudo-trajectories are continuously shadowable for an infinite time, i.e. there exists a $\delta > 0$ such that all δ -pseudo-trajectories $\{\mathbf{z}_n\}_{n=0}^N$ in an invariant hyperbolic set Ω are ε -shadowable by a “true” trajectory $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^N$ for arbitrarily long times. Let us present a short outline of the proof of the shadowability lemma [Meyer & Hall, 1992; Grebogi *et al.*, 2002], in order to highlight where the hyperbolicity requirement enters in the reasoning leading to continuous shadowability.

Let $\mathbf{Z}_\infty = \{\dots, \mathbf{z}_{-1}, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots\}$ be a shadowing δ -pseudo-trajectory of arbitrary length, and V be the space of these vectors of infinite length, with a suitable norm $\|\mathbf{Z}_\infty\| = \sup_n |\mathbf{z}_n|$. We define a function $\mathcal{G} : V \rightarrow V$ such that $(\mathcal{G}(\mathbf{Z}_\infty))_n = \mathbf{f}((\mathbf{Z}_\infty)_{n-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_{n-1})$, where \mathbf{f} is supposed to be a smooth hyperbolic map, and $(\cdot)_i$ denotes the i th component of a vector in V . If \mathbf{X}_∞ is a fixed point of \mathcal{G} , then \mathbf{X}_∞ is a true trajectory since $(\mathcal{G}(\mathbf{X}_\infty))_n = \mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$.

From the previous definition, \mathbf{Z}_∞ is a δ -pseudo-trajectory if $\|\mathcal{G}(\mathbf{Z}_\infty) - \mathbf{Z}_\infty\| < \delta$. Defining $\mathcal{F}(\mathbf{Z}_\infty) = \mathcal{G}(\mathbf{Z}_\infty) - \mathbf{Z}_\infty \equiv \mathbf{E}_\infty$, we can cast the shadowability lemma in the following form: for every $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that if $\|\mathcal{F}(\mathbf{Z}_\infty)\| = \|\mathbf{E}_\infty - \mathbf{0}\| < \delta$, then there is a fixed point \mathbf{X}_∞ of \mathcal{G} such that $\|\mathbf{Z}_\infty - \mathbf{X}_\infty\| = \|\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{E}_\infty) - \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{0})\| < \varepsilon$, and \mathcal{F} and \mathbf{E}_∞ may be regarded as extensions of the function \mathbf{F} and the error vector \mathbf{E} , respectively.

The requirement of \mathbf{f} being a smooth map with a hyperbolic structure, Eqs. (2)–(4), is necessary to shown that the jacobian derivative $D\mathcal{F}$ and its inverse $D\mathcal{F}^{-1}$ are both bounded in the linear vector space to which V belongs. Let $B_\eta(\mathbf{Z}_\infty)$ denote a ball (in the vector space V) of radius η centered at the point \mathbf{Z}_∞ . The implicit function theorem thus guarantees the existence of a domain Λ , with $B_\rho(\mathbf{Z}_\infty) \subset \Lambda \subset B_\eta(\mathbf{Z}_\infty)$, such that \mathcal{F} is one-to-one on Λ , and $B_\sigma(\mathcal{F}(\mathbf{Z}_\infty)) = B_\sigma(\mathbf{E}_\infty) \subset \mathcal{F}(\Lambda)$. A proper choice of η would imply $\mathbf{0} \in B_\eta(\mathbf{E}_\infty)$, and there is a unique true trajectory $\mathbf{X}_\infty \in \Lambda$ such that $\mathcal{F}(\mathbf{X}_\infty) = \mathbf{0}$. Moreover, we have $\|\mathbf{Z}_\infty - \mathbf{X}_\infty\| <$

$\eta \leq \varepsilon$, so that we have an ε -shadowing trajectory. The implicit function theorem ensures the continuity of \mathcal{F}^{-1} on $B_\sigma(\mathbf{E}_\infty)$, meaning that all pseudo-trajectories (including \mathbf{Z}_∞) in a small neighborhood of \mathbf{X}_∞ are continuously shadowed by the same true trajectory \mathbf{X}_∞ .

However, as we have mentioned in the previous section, the hyperbolicity requirement is too strong for most dynamical systems of physical and technological interest. Moreover, even if the invariant set is hyperbolic but has a fractal measure (with respect to the Lebesgue measure) the shadowability lemma may not be applicable since there is no reason for the pseudo-trajectory to lie in the invariant set [Poon *et al.*, 1994]. Even a robustly transitive diffeomorphism having a strong partially hyperbolic splitting for the tangent space $T_{\mathbf{x}} = E_{\mathbf{x}}^u \oplus E_{\mathbf{x}}^s \oplus E_{\mathbf{x}}^c$ (in which there exists also a central invariant subspace) fails to obey the shadowability lemma [Bonatti *et al.*, 2000].

The applicability of the shadowability theory to nonhyperbolic system was extensively investigated in the late 80's [Grebogi *et al.*, 1987, 1988a, 1990]. When a system fails to be hyperbolic due to homoclinic tangencies, it was proved that pseudo-trajectories can still be continuously shadowable for a long, but finite time. The proof is technically involved, but states basically that if certain quantities calculated at the points of a pseudo-trajectory are bounded, then there exists a "true" trajectory close to the pseudo-trajectory. Another way to express this result is that, for nearly hyperbolic systems, locally sensitive trajectories are often globally insensitive [Sauer, 2002]. For each point of the pseudo-trajectory, subspaces complementary to the tangent space are defined such that they can approach the stable and unstable manifolds provided these complementary subspaces exist. Hence, pseudo-trajectories may be continuously shadowable for a finite time-span. Failures of continuous shadowability of pseudo-trajectories are called *glitches*, and may be due to near-tangencies between invariant manifolds [Grebogi *et al.*, 2002]. The time we are able to verify continuous shadowability in this case is basically the time interval until a pseudo-trajectory encounters a glitch. Since numerical results use finite-time pseudo-trajectories, these may have the adequate shadowability properties. These claims have been confirmed by carefully designed numerical experiments [Dawson *et al.*, 1994].

3.3. Model shadowability

We can think of a pseudo-trajectory in two equivalent ways. One is to suppose, as we have done here, that it comes from the numerical integration of an "exact" model, a process that introduces unavoidable roundoff errors that make the computer-generated trajectory to exponentially diverge from the "true" chaotic trajectory. An equivalent point of view is that the pseudo-trajectory results from an imperfect model, which is a slightly perturbed version of the "exact" model [Lai *et al.*, 1999a; Lai & Grebogi, 2000a]. The small difference between two mathematical models, denoted as \mathcal{A} and \mathcal{B} , of a same physical process can be due to several factors: (i) small differences in the parameter values of the models; (ii) small deviations on the external influence (as a periodic driving term) on each model; or (iii) a small bounded noise level in either model (what excludes an unbounded Gaussian noise, for example).

Successful mathematical modeling requires that the set of all possible results from model \mathcal{A} agree, in an approximate way, with all possible results from model \mathcal{B} (*model shadowability* [Lai *et al.*, 1999a; Lai & Grebogi, 2000a]). \mathcal{A} and \mathcal{B} are said to exhibit model shadowability if each trajectory obtained from model \mathcal{A} is continuously shadowed by some trajectory obtained from model \mathcal{B} . This turns out to be a necessary condition for either model to properly describe the dynamical behavior of the physical phenomenon being investigated. If the models fail to exhibit this property, it is claimed that no trajectory of \mathcal{A} can be continuously shadowed by trajectories of \mathcal{B} . Hence it is unlikely that either model could produce chaotic trajectories realized by Nature.

The applicability of the shadowability properties for typical trajectories of nonhyperbolic systems presenting homoclinic tangencies enables us to extend the model shadowability concept to such systems. As an illustrative example, let \mathcal{A} be the Hénon map, with a nonhyperbolic chaotic attractor, due to the infinite number of tangencies between stable and unstable manifolds of the embedded unstable periodic orbits [Grebogi *et al.*, 1983]. Model \mathcal{B} could be a noisy version of \mathcal{A} , in which a term ϖd_n , where $\varpi \ll 1$ and d_n is a zero-mean bounded noise with a uniform distribution in $[0, 1]$, added to the x -part of the map. Chaotic trajectories of the noisy Hénon map \mathcal{B} can be continuously shadowed by trajectories of the original map \mathcal{A} up to a time $\varpi^{-\alpha}$, where $\alpha \lesssim 1/2$ is the scaling exponent [Grebogi

et al., 1987, 1988a]. This is basically the average time interval it takes for a pseudo-trajectory to fall in the neighborhood of an homoclinic tangency, or a glitch.

4. Unstable Dimension Variability

UDV is a property of unstable periodic orbits embedded in a chaotic invariant set having a different number of unstable eigendirections, i.e. the unstable dimension d^u is not constant for points belonging to Ω . Such chaotic invariant sets are strongly nonhyperbolic, because the subspaces E_x^u and E_x^s are not invariant along a typical chaotic trajectory.

As an illustrative example, let f be a two-dimensional map with an invariant chaotic (nonattracting) set Ω with an infinite number of embedded unstable fixed points. Now suppose that a fraction of these points are saddles (one stable and one unstable direction) and the remaining are repellers (two unstable directions). Consider a typical chaotic trajectory on this invariant set Ω . As it evolves in time, the trajectory visits the neighborhood of an infinite number of saddles and repellers, due to the ergodicity of the dynamics on Ω . If we take a small disk of initial conditions near a saddle, it will shrink along the stable manifold and elongate along the unstable manifold, becoming a thin filament. While this occurs, it is still possible to shadow orbits within the filament, since the dynamics is hyperbolic then. However, points belonging to this filament will eventually approach repellers, and they will diverge from perturbed trajectories due to the new unstable direction. The result is the lack of continuous shadowability of typical trajectories after a relatively short timespan. This limits, in a severe way, the usefulness of such systems in situations for which the timescale of interest is higher than the time for which shadowing applies.

UDV has been first described by Abraham and Smale [1970] for a diffeomorphism in $T^2 \times S^2$ whose invariant set has two fixed points with different unstable dimensions. However, the first observation of UDV for a dynamical system of physical interest did not appear until 1992, when its existence was incidentally reported for the impulsively kicked double rotor, described by the following four-dimensional invertible map [Romeiras *et al.*, 1992]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{Y} + \mathbf{X} \\ \mathbf{L}\mathbf{Y} + \mathbf{G}(\mathbf{X}') \end{pmatrix} \quad (8)$$

where $\mathbf{X} = (x_1, x_2)^T \in S^1 \times S^1$, are the angular positions of the rotor rods at discrete times nT ($n \in \mathcal{Z}$), T being the period of the delta-function excitation, and $\mathbf{Y} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$, the corresponding angular velocities just after each delta kick. The nonlinear functions are $\mathbf{G}(\mathbf{X}') = (c_1 \sin x'_1, c_2 \sin x'_2)^T$, where c_i are functions of the kick strength f_0 (which is the control parameter of the system). \mathbf{L} and \mathbf{M} are 2×2 constant matrices whose entries are functions of the remaining physical parameters of the rotor, including the dissipation coefficients.

Due to the $y_i \rightarrow -y_i$ symmetry of the kicked double rotor map, it turns out that the plane $y_1 = y_2 = 0$ is an invariant subspace of the system, such that four of its fixed points lie on this subspace and can be classified in one-parameter families $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)^T = (x_1^{(n_1, n_2, q)}, x_2^{(n_1, n_2, q)}, 0, 0)^T$, where $n_1 = n_2 = 0$ are integer rotation numbers, and $q = 1, 2, 3, 4$. Let us focus our attention on the unstable fixed point P , for which $x_1^* = x_2^* = \pi$. For $f_0 \lesssim f_{0C} \approx 8.1104126$ it has three stable eigendirections and one unstable eigendirection, i.e. $d^u = 1$. At $f_0 = f_{0C}$ there is a period-doubling bifurcation (eigenvalue = -1) such that, for $f_0 \gtrsim f_{0C}$ the point P has now two stable and two unstable eigendirections ($d^u = 2$). Every preimage of P shares the same property. We remark that $(\pi, \pi, 0, 0)$ is a stable period-1 orbit which undergoes a period-doubling bifurcation at lower value of f_0 , namely ≈ 4.27 , which is followed by a period-doubling cascade which accumulates at $f_0 \approx 6.75$.

Hence, after this bifurcation there is an infinite number of fixed points embedded in the chaotic attractor with either one or two unstable directions, which identifies the occurrence of UDV at $f = f_{0C}$. It was recognized that this is related to the fluctuating behavior (around zero) of the finite-time Lyapunov exponent closest to zero [Dawson *et al.*, 1994]. If the latter fluctuates about zero during a trajectory, we have a tangential direction which is uncertain between expansion and contraction [Sauer, 2002]. The brittleness of numerical pseudo-trajectories of the double rotor, when it exhibits UDV, has been shown to increase to very high values [Grebogi *et al.*, 2002].

In the case of the kicked double rotor, the invariant set of interest is a chaotic attractor, but UDV can also appear in nonattracting chaotic sets, as strange saddles smooth along an unstable direction [Dawson, 1996]. A map on the 2-torus,

with dense sets of saddles and repellers, was found to exhibit UDV by Kostelich *et al.* [1997]. The presence of UDV seems to be typical in general high-dimensional dynamical systems, as shown by Lai and Grebogi [1999a], who have described its occurrence in globally coupled Hénon and Ikeda map lattices.

The latter observation can be put in a more general context, if one considers the problem of modeling coupled chaotic oscillators. Since the seminal work of Pecora and Carroll [1990] it has been recognized that an array of chaotic oscillators can synchronize their trajectories. For a general class of coupled map lattices

$$\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(j)}), \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

or coupled oscillator chains,

$$\frac{d\mathbf{x}^{(i)}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}(t)) - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(j)}(t)), \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

where $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathcal{R}^D$ and \mathbf{F}, \mathbf{H} are D -dimensional smooth vector functions, it turns out that the synchronization manifold

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = \dots = \mathbf{x}^{(N)} \quad (11)$$

is a chaotic invariant set for the system (9), provided $\sum_j g_{ij} = 0$ [Lai & Grebogi, 1999].

UDV has been numerically observed in a system of locally coupled Hénon maps in the form as Eq. (9) for any nonzero coupling strength ε [Lai & Grebogi, 2000a]. The coupled maps may also be regarded as Poincaré maps of continuous time flows. In fact, systems of continuous-time oscillators coupled in the form (10) have also been argued to exhibit UDV, as it was numerically confirmed for chains of Rössler oscillators [Lai *et al.*, 1999b]. Not only the completely synchronized state (11), but also phase synchronized states in chaotic systems were proved to exhibit UDV for nonvanishing coupling strength [Andrade & Lai, 2001].

The ubiquitous presence of UDV in chaotic systems with invariant subspaces is expected on rather general grounds [Lai, 1996; Lai & Grebogi, 2000a], since the number of unstable directions of any unstable periodic orbit embedded in the invariant chaotic set is determined by: (i) the local chaotic

dynamics on the invariant subspace; and (ii) the transverse dynamics [such as the coupling strength in Eq. (9)]. In particular, the appearance of UDV in the synchronization manifold of coupled chaotic oscillators is related to the so-called *bubbling transition*, in which periodic orbits embedded in the manifold lose transversal stability [Ashwin *et al.*, 1994, 1996].

If the interacting systems are not identical, or if they are very weakly coupled, they do not present in general exact amplitude synchronization, but they may present a generalized synchrony [Boccaletti *et al.*, 2001]. In this case, instead of a synchronization manifold we focus on an emergent set that arises from a decoherence transition. This mechanism has also been blamed to be a general source of UDV in such systems [Barreto *et al.*, 2000; Barreto & So, 2000]. In high-dimensional systems the transition to hyperchaos, when there are multiple positive Lyapunov exponents, has been also shown to be related to UDV [Davidchack & Lai, 2001]. For dynamical systems possessing two or more asymptotic sets with a different number of unstable directions, extrinsic noise has been shown to lead to UDV [Lai *et al.*, 2003].

It may seem at first that it is hopeless that a chaotic system exhibiting UDV happens to be of practical use, for it would lack adequate shadowability properties. However, if we consider not single trajectories but rather ensembles of them, statistical quantities could sometimes be reliably computed [Lai *et al.*, 1999a; Sauer, 2002]. This was numerically checked by computing the average energy (and its second moment) of a kicked double rotor, by using two slightly different models, and obtaining results which agree within the numerical accuracy [Lai *et al.*, 1999a]. However, there can be found a family of examples exhibiting UDV, for which even tiny one-step errors in numerical simulations cause macroscopic errors (many orders of magnitude higher) in long-term averages [Sauer, 2002]. Another distinctive feature present in systems with UDV is their robustness against external noise [Kantz *et al.*, 2002].

While in complex systems UDV is apparently very common, if not a universal characteristic, the mechanism of its generation is still not completely understood. Hence, in order to investigate this issue, we consider a simple dynamical system that allows for an easier identification of the bifurcation structure underlying the onset of UDV.

5. A Case Study

We consider a class of two-dimensional noninvertible maps with an invariant chaotic set in which embedded unstable orbits can have unstable dimensions equal to either 1 or 2. In particular, the invariant set may be regarded as the synchronization manifold of two coupled one-dimensional maps [Viana & Grebogi, 2000]. On the other hand, the invariant subspace may also appear as a result of some phase-space symmetry of the dynamical system, as it occurs in the kicked double rotor example.

A class of systems with an invariant subspace are the ones with a skew-product structure in the form

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (12)$$

$$y_{n+1} = pg(x_n)y_n + \text{higher order odd powers of } y, \quad (13)$$

where $x \in J \subset \mathbf{R}^1$ and $y \in K \subseteq \mathbf{R}^1$. Due to a $y \rightarrow -y$ symmetry there is an invariant subspace Σ given by $y = 0$, in such a way that y will be called the transversal direction with respect to Σ . We suppose that $f: J \rightarrow J$ is such that there is a chaotic invariant set in $\Omega \subset \Sigma$, and choose $p > 0$ as a bifurcation parameter, satisfying $pg(x_n) \geq 0$ for all $x \in J$. Moreover, we suppose that $g(x) = 1$, when x is some unstable low-period orbit $x = \chi$ in the chaotic set Ω .

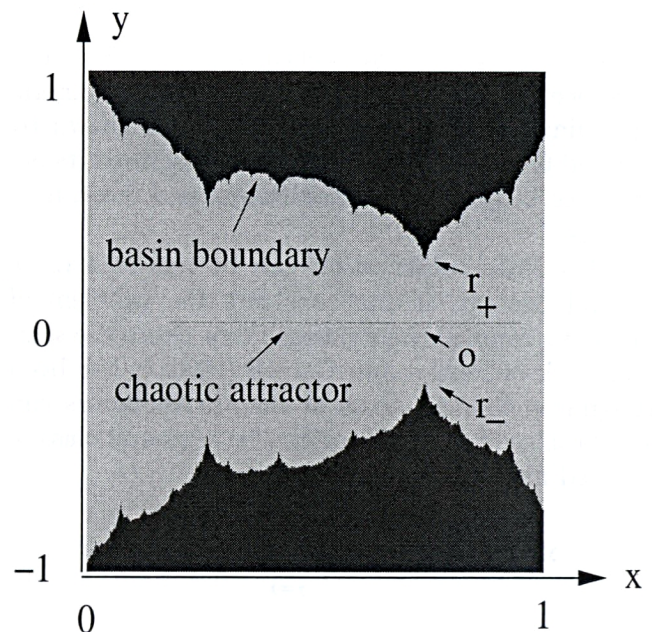
A particular example belonging to this family is the following two-dimensional map

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad (14)$$

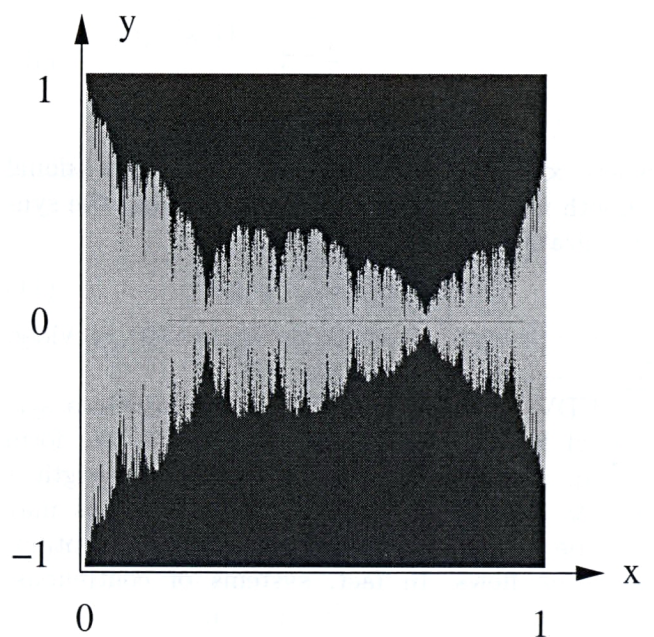
$$y_{n+1} = pe^{-b(x_n - \chi)^2}y_n + y_n^3, \quad (15)$$

where $x \in J = [0, 1]$, and we choose a so that there is a dense chaotic orbit on the attractor. There is a positive Lebesgue measure set of values of a for which this is true [Jacobson, 1981]. We set $\chi = 1 - (1/a)$ as an unstable fixed point embedded in the chaotic attractor Ω . This map was introduced to study the formation of riddled basins of attraction [Lai et al., 1996], and exhibits qualitatively different dynamical behaviors according to the value that the bifurcation parameter $p > 0$ takes on.

If $p < 1$ [Fig. 1(a)] there is a fractal boundary between the basin of the chaotic attractor Ω and the basin of the attractor at infinity. The latter arises since there are only *odd* powers of y in the map (15), such that if $|y_n| > 1$, then $|y_{n+1}| > |y_n| > 1$. Once a trajectory off the invariant subspace reaches the



(a)



(b)

Fig. 1. Phase portrait of the map (14)–(15) for $a = 3.8$, $b = 5.0$, and: (a) $p = 0.99$; (b) $p = 1.30$. The dark region contains initial conditions that asymptote to infinity, and the gray region is the basin of the attractor at $y = 0$. The arrows indicate the unstable fixed points of the map.

$|y| = 1$ line, it asymptotes to infinity. For $p \geq 1$ the basin boundary has collided with the attractor, and the latter becomes a nonattracting chaotic saddle [Fig. 1(b)] through a boundary crisis [Grebogi et al., 1983a].

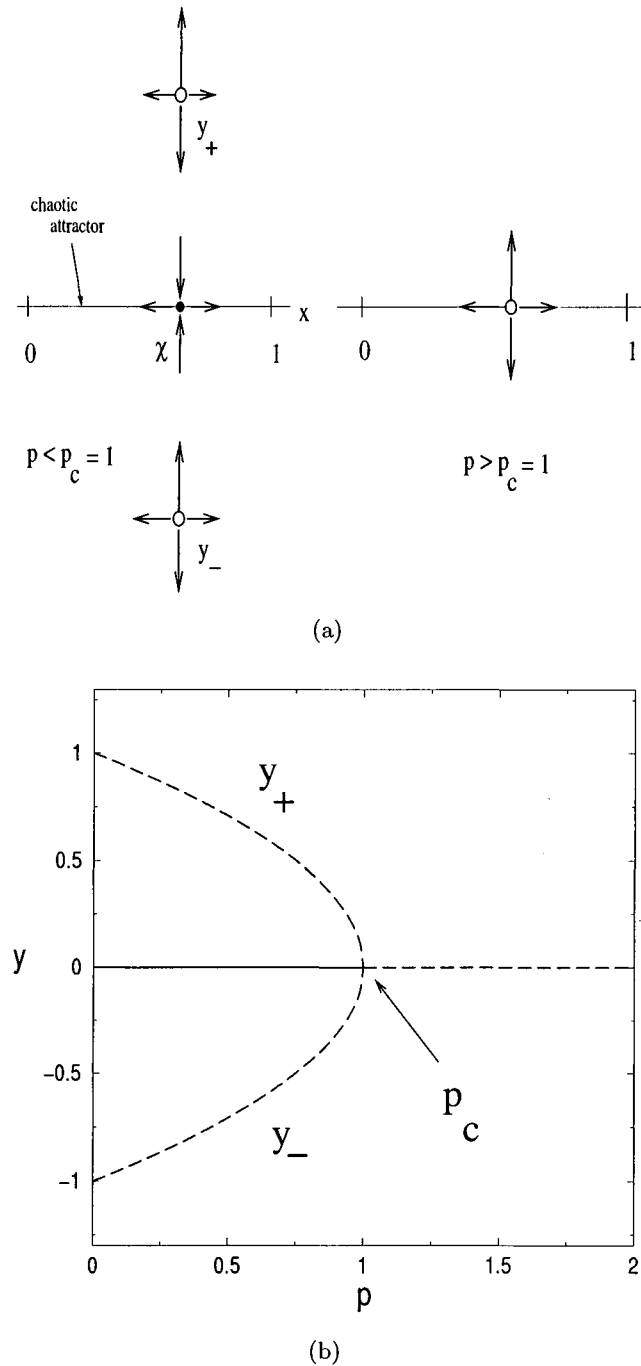


Fig. 2. (a) Fixed points of the map (14)–(15) before and after the saddle-repeller bifurcation; (b) Bifurcation diagram of (15) at $x = \chi$. Solid (dashed) lines indicate stable (unstable) fixed points.

A linear stability analysis indicates an unstable–unstable pair bifurcation (with eigenvalue $+1$) occurring at $p = p_c = 1$. The fixed points of interest of the map (14)–(15) are $\mathbf{0} = (\chi, 0)$, and $\mathbf{r}_{\pm} = (\chi, y_{\pm}^* = \pm\sqrt{1-p})$ [Fig. 1(a)]. For $p < 1$ (≥ 1) $\mathbf{0}$ is transversely stable (unstable), i.e. $\mathbf{0}$ is a saddle (repeller) with unstable dimension one (two). The

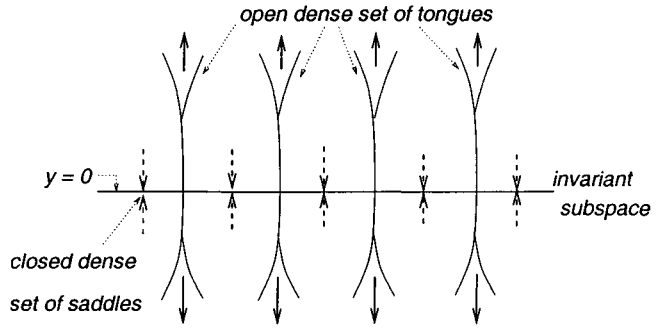


Fig. 3. Schematic figure showing the tongue-like structure that appears for $p > 1$. Adapted from [Lai & Grebogi, 2000b].

other pair of fixed points which we named \mathbf{r}_{\pm} , are located off the invariant subspace [actually they belong to the basin boundaries, cf. Fig. 1(a)] and are repellers for $p < 1$. As p approaches $p_c = 1$, they collide with the fixed point at $y = 0$ and coalesce into a single repeller [Fig. 2(a)]. For all $p \geq p_c$ the invariant chaotic set Ω is a nonattracting saddle [Fig. 2(b)].

When the fixed point at $y = 0$ becomes transversely unstable, every preimage of it does so. Since there is a denumerable infinite number of such eventually fixed points embedded in the chaotic set [Gulick, 1990], we conclude that a countably infinite number of periodic saddles become repellers at $p = p_c = 1$, and its complement is a set with an uncountably infinite number of saddles. While the set of newborn repellers has Lebesgue measure zero, the set of saddles has the full Lebesgue measure. Since both sets are dense in Ω , the saddle-repeller (pitchfork) bifurcation at p_c marks the onset of UDV in the system [Viana & Grebogi, 2001].

What is the fate of trajectories off the invariant chaotic set, after this bifurcation has occurred? We already know that, once reaching the $|y| = 1$ line, they asymptote to infinity. However, a feature not revealed by a linear stability analysis, and that stems from the nonlinear terms in Eq. (15), is the existence, between this line and the symmetry plane, of a dense sequence of tongues, anchored at the repellers (Fig. 3). The envelope of these tongues can be analytically estimated [Lai *et al.*, 1996], but their existence can also be inferred from a more general argument, as follows.

Let us consider an open set $\mathcal{O} = \{y > 1\}$ which intersects the transverse unstable manifold of χ , the repeller belonging to the invariant set Ω . The inverse images of \mathcal{O} , which by continuity are also open sets, asymptotically approach χ [Lai & Grebogi,

2000b]. These inverse images of \mathcal{O} are a subset of the tongue anchored at $x = \chi$. The set of tongues, off the symmetry plane $y = 0$, forms an open and dense set, while its complement is a closed Cantor set of positive measure [Grebogi et al., 1985]. An initial condition very close to the invariant subspace at $y = 0$ generates a trajectory that wanders erratically back and forth in the x -direction, due to the large eigenvalue ($L_u = 2$) of the tangent map, until, if the trajectory is not already in the tongues, noise will push it in a tongue and it will asymptote to infinity [Grebogi et al., 1983b]. Since just after the bifurcation these tongues may be very narrow, it might take a very large time for an orbit to enter a tongue and be ejected away [Viana & Grebogi, 2000].

As p is further increased past $p_c = 1$, many other unstable periodic orbits embedded in the chaotic set at $y = 0$ lose transversal stability, and more and more saddles become repellers. The relative proportion between saddles and repellers changes with varying p , in a way that can be quantitatively treated using the methods to be described in the following section.

6. Quantifying Unstable Dimension Variability

6.1. Finite-time Lyapunov exponents

The relative abundance of periodic orbits with a different number of unstable directions can be evaluated by calculating the corresponding finite-time Lyapunov exponents [Abarbanel et al., 1991]. These are computed in the same way as is done for the commonly used Lyapunov exponents, but using a finite (and usually short) timespan $n < \infty$. Its use in nonlinear dynamics is receiving a growing interest, since many dynamical regimes can be identified by using them [Prasad & Ramaswamy, 1999].

It has been recognized as a fingerprint of UDV in dynamical systems — the fluctuating behavior (around zero) of the time- n exponent closest to zero [Dawson et al., 1994]. To understand qualitatively why does it happen, for the example studied in the previous section, let us consider an initial condition off but very close to the invariant subspace Σ . The resulting trajectory is properly quoted as a chaotic transient, since it eventually goes to infinity. Before this occurs, however, this transient orbit visits ε -neighborhoods of saddles and repellers of the in-

variant set for any ε , *no matter how small*. This means that there are time- n segments for which the trajectory is transversely attracting (in average) and others for which it is transversely repelling (also in average). This is properly quantified by time- n Lyapunov exponents along the transversal y -direction.

In order to apply this concept to the previously studied example, we will present the definitions only for a N -dimensional map $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, but they can be straightforwardly extended to continuous-time flows as well. Let n be a positive integer and $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ be the Jacobian matrix of the n times iterated map, with entries evaluated at \mathbf{x}_0 . Suppose that the singular values of $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ are ordered: $\xi_1(\mathbf{x}_0, n) \geq \xi_2(\mathbf{x}_0, n) \geq \dots \geq \xi_n(\mathbf{x}_0, n)$. Then, the k th time- n Lyapunov exponent for the point \mathbf{x}_0 is defined as [Kostelich et al., 1997]

$$\lambda_k(x_0, y_0; n) = \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{Df}^n(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}_k\|, \quad (16)$$

where \mathbf{v}_k is the singular vector related to $\xi_k(\mathbf{x}_0, n)$.

The infinite time-limit of the above expression is the usual Lyapunov exponent $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(\mathbf{x}_0, n)$. Although the time- n exponent $\lambda_k(\mathbf{x}_0, n)$ generally takes on a different value, depending on the point we choose, the infinite time limit takes on the same value for almost all \mathbf{x}_0 with respect to the natural ergodic measure of the invariant set [Viana & Grebogi, 2001]. For the map studied in the previous section there are two such exponents,

$$\lambda_1(x_0, y_0; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln[a(1 - 2x_i)], \quad (17)$$

$$\lambda_2(x_0, y_0; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left[p e^{-b(x_i - \chi)^2} + 3y_i^2 \right], \quad (18)$$

and we focus our attention on the transversal one, $\lambda_2(x_0, y_0; n)$, which infinite time limit is the conditional Lyapunov exponent λ_T for the invariant set Ω . If λ_T goes through zero from negative values (a *blowout bifurcation* [Ashwin et al., 1994]) the invariant set loses transversal stability. As p increases past $p_c = 1$, an increasing number of saddles in Ω lose transversal stability. We have described in detail this transition for a period-1 orbit (fixed point), but similar bifurcations — often named *bubbling bifurcations* [Ashwin et al., 1996] — occur for other periodic orbits as p increases.

If Ω displays UDV, the time- n Lyapunov exponent in the transversal direction will erratically

fluctuate about zero, which suggests the use of a probability density $P_L(\lambda_2(x_0, y_0; n), n)$, so that $P_L(\lambda_2(n), n)d\lambda_2$ is the probability that the time- n exponent takes on a value between λ_2 and $\lambda_2 + d\lambda_2$ for a given n [Kostelich *et al.*, 1997]. The initial conditions (x_0, y_0) are randomly chosen according to the Lebesgue measure of Ω . From this probability distribution we can obtain moments of functions of the time- n exponent, as averages

$$\begin{aligned} \langle F(\lambda_2(\mathbf{x}_0, n)) \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda_2(\mathbf{x}_0, n)) P_L(\lambda_2(\mathbf{x}_0, n), n) d\lambda_2, \end{aligned} \quad (19)$$

assuming proper normalization for $P_L(\lambda_2, n)$.

For n large enough the form of this distribution can be written in the following form [Ellis, 1985]

$$P_L(\lambda_2(n), n) \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_T)}{2\pi}} e^{-nG(\lambda_2)}, \quad (20)$$

where λ_T is the infinite-time limit of $\lambda_2(n)$, and the function $G(\lambda)$ has the following properties:

$$G(\lambda_T) = G'(\lambda_T) = 0, \quad G''(\lambda_T) > 0. \quad (21)$$

Expanding $G(\lambda)$ in the vicinity of λ_T , the first non-vanishing term is the quadratic one, i.e. $P_L(\lambda_2)$ is expected to have a Gaussian shape

$$\begin{aligned} P_L(\lambda_2) \\ \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_T)}{2\pi}} \exp \left[-\frac{nG''(\lambda_T)}{2} (\lambda_2 - \lambda_T)^2 \right], \\ (n \gg 1). \end{aligned} \quad (22)$$

We can obtain a numerical approximation for this probability distribution by considering a large number of trajectories of length n from initial conditions randomly chosen in the chaotic invariant set. In Fig. 4 we show some distributions of time-50 exponents, obtained for different values of the bifurcation parameter p . We see that their shape is indeed Gaussian, and the distribution as a whole drifts toward positive values of λ_2 , as p increases. The rate in which this drift occurs is not constant, however, as it can be seen in Fig. 5, where the average value of the time- n exponents, $m = \langle \lambda_2(n) \rangle$, is plotted *versus* the bifurcation parameter p .

The variance of the average m , with respect to a sample of size n , which we denote σ_n^2 , is a constant value about 0.035 for all p -values, indicating that the Gaussian nature of the distribution $P_L(\lambda_2)$ is not significantly altered. A standard result [Bulmer, 1979] says that the variance of the total population

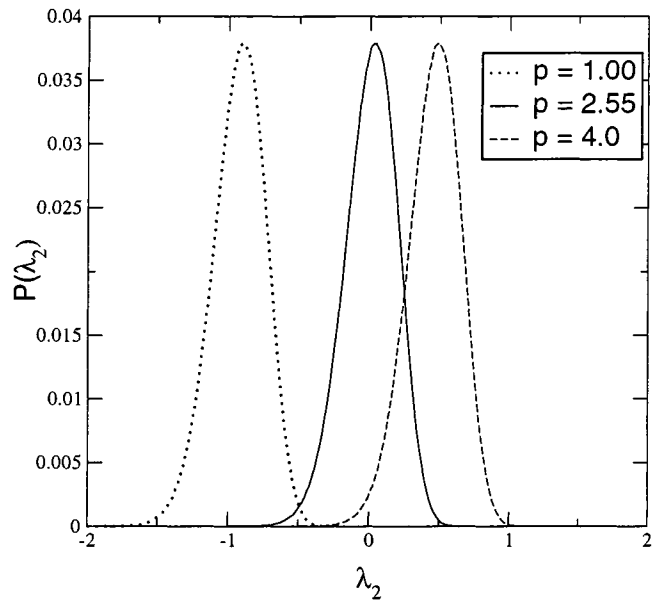


Fig. 4. Probability distribution $P(\lambda_2, 50)$ for time-50 transversal exponents and different values of the bifurcation parameter p . The remaining parameters are $a = 4.0$ and $b = 5.0$.

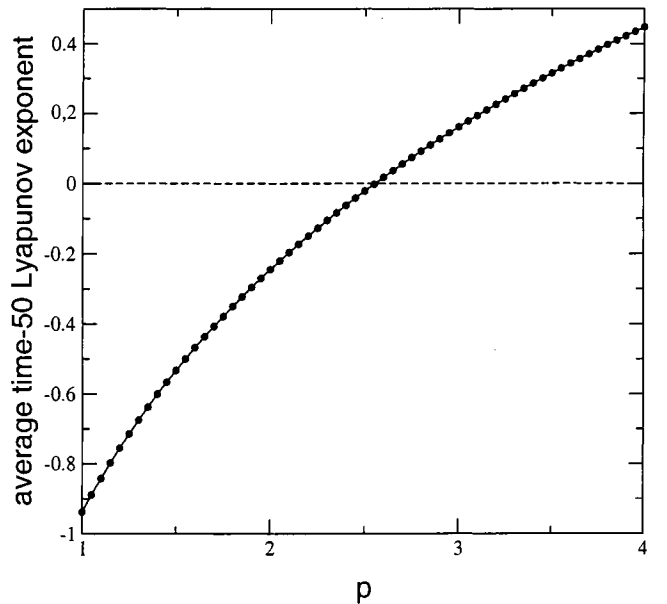


Fig. 5. Average transversal time-50 Lyapunov exponent as a function of p . Other parameters are the same as in the previous figure. It crosses the horizontal axis at $p^* \approx 2.55$, which signals a blowout bifurcation.

is equal to the product of the variance of the average by the sample size, hence the total variance of the time- n exponents is $\sigma^2 = n\sigma_n^2$, equal to 1.75 for the time-50 exponent distributions depicted in Fig. 4.

6.2. Natural measure and unstable periodic orbits

Although the fluctuating behavior of the time- n exponents has proven to be a useful diagnostic for the presence of UDV in a chaotic system, it is necessary to quantify the intensity of this effect, since it is apparent from the drifting behavior of $P_L(\lambda_2, 50)$ shown in Fig. 4 that, for increasing p , progressively more exponents become positive. This indicates that a growing number of periodic orbits embedded in the chaotic invariant set become transversely unstable. For $m \approx 0$ we would expect as many negative exponents as positive ones, and that situation would maximize the effect of UDV. Using arguments from the ergodic theory of chaotic sets, and a significant amount of previous numerical evidence, it follows that UDV is more pronounced when the infinite-time transversal Lyapunov exponent (λ_T) vanishes [Lai & Grebogi, 2000a].

To compute the conditional exponent λ_T we use typical trajectories on the chaotic invariant set Ω , with respect to its natural measure $\mu(\Omega)$. Since there are an infinite number of unstable periodic orbits embedded in Ω , they support the natural measure in the sense that, when computing λ_T , these periodic orbits contribute with different weights. These weights are determined by the natural measure of a typical trajectory which visits the neighborhoods of the periodic orbits, and are related to the magnitudes of the unstable eigenvalues of those unstable orbits [Lai & Grebogi, 2000a]. The natural measure of a typical trajectory in the neighborhood of a periodic orbit is related to the probability of being in its vicinity, and it is smaller for a more unstable periodic orbit [Farmer *et al.*, 1983]. Hence, the larger is the unstable eigenvalue of the periodic orbit, the smaller is its contribution to the natural measure. Summing over all unstable period- q orbits embedded in the invariant set Ω gives then its natural measure [Grebogi *et al.*, 1998b]

$$\mu(\Omega) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{x}_q(j) \in \Omega} \frac{1}{L_u(\mathbf{x}_q(j))}, \quad (23)$$

where $\mathbf{x}_q(j)$ is the j th fixed point of $\mathbf{f}^q(\mathbf{x})$, i.e. $\mathbf{x}_q(j)$ is on a period- r orbit, where r is q or a prime factor of q , and L_u is the expanding eigenvalue of this orbit. This expression was originally derived for hyperbolic systems [Grebogi *et al.*, 1998b], but its validity for nonhyperbolic ones has been verified in all analyzed cases [Lai *et al.*, 1997].

The natural measure associated with the j th period- q orbit is the normalized ratio [Lai & Grebogi, 2000a]

$$\mu_q(j) = \frac{1/L_u(\mathbf{x}_q(j), q)}{\sum_{\ell=1}^{N_q} [1/L_u(\mathbf{x}_q(\ell))]}, \quad (24)$$

where N_q is the number of period- q orbits. N_q^s and N_q^u are the numbers of transversely stable and unstable period- q orbits, respectively, such that $N_q^s + N_q^u = N_q$. In the case example of Sec. 5, when $q = 1$ it turns out that N_1^s and N_1^u are the numbers of saddles and repellers, respectively. The weights of the transversely stable and unstable period- q orbits are given, respectively, by

$$\Lambda_q^s = \sum_{j=1}^{N_q^s} \mu_q(j) \lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q) \quad (\text{for } \lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q) < 0), \quad (25)$$

$$\Lambda_q^u = \sum_{j=1}^{N_q^u} \mu_q(j) \lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q) \quad (\text{for } \lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q) > 0), \quad (26)$$

where $\lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q)$ is the time- q transversal Lyapunov exponent for the j th period- q orbit. If $\lambda_2(\mathbf{x}_q(j), q)$ is positive (negative) the periodic orbit is transversely unstable (stable).

When λ_T becomes zero, at the blowout bifurcation point, it follows that the contributions of the transversely stable and unstable period- q orbits are exactly counterbalanced, and UDV is expected to be more intense. We can verify this prediction for the case example studied in the previous section, for it presents a variable bifurcation parameter p , such that, for $p > 1$, the system exhibits UDV. The infinite-time transversal Lyapunov exponent Λ_T vanishes for $p = p^* \approx 2.55$, which is the critical value for the blowout bifurcation.

A linear stability analysis indicates three qualitatively different regimes for Ω , according to the corresponding value of p :

- (i) $0 < p < p_c = 1$: Ω is a chaotic attractor, in which all embedded unstable orbits are saddles, i.e. Ω is transversely stable as a whole. There is no UDV at all. $p = p_c$ is a saddle-repeller bifurcation point.
- (ii) $p_c \leq p < p^* \approx 2.55$: Ω is a chaotic saddle, in which there are “more” saddles than repellers,

in the sense that the natural measure is supported mainly by the transversely stable orbits. Ω is, on the average, transversely stable. The effect of UDV is progressively more intense as p increases from p_c . $p = p^*$ is a blowout bifurcation point.

- (iii) $p \geq p^*$: Ω is still a chaotic saddle, but there are “more” repellers than saddles, in the same sense as before. Ω is, also on the average, transversely unstable.

Since, for $p > 1$, a trajectory off the invariant subspace eventually asymptotes to infinity, it would seem at first that Ω could not be transversely stable at all. However, our transversal stability analysis is linear, whereas the escaping of trajectories to infinity is a nonlinear effect [due to the cubic y^3 term in Eq. (15)]. Therefore, even though in case (ii) the chaotic saddle was found to be linearly transversely stable, it is nonlinearly transversely unstable, in the sense that any trajectory off the chaotic saddle eventually escapes to infinity.

From Eq. (22), the distribution of the transversal time- n exponents, $P_L(\lambda_2(n))$, is centered at $\lambda_2 = \lambda_T$, so that $m = \lambda_T$, which also follows from direct integration. Accordingly, the total variance is $\sigma^2 = n < (\lambda_2 - m)^2 > = 1/G''(\lambda_T)$, which is independent of n .

A quite direct procedure to quantify the relative abundance of saddles and repellers in the chaotic invariant set Ω is to compute the fraction of positive transversal time- n exponents [Viana & Grebogi, 2001]

$$\phi(n) = \int_0^\infty P_L(\lambda_2(\mathbf{x}_0, n), n) d\lambda_2 \quad (27)$$

shown in Fig. 6 as a function of p . For $p < 1$ it is zero and increases monotonically for $p \geq 1$, saturating at $\phi = 1$ for large p . At the blowout bifurcation point p^* we have $\phi = 1/2$, for exactly half of the time- n exponents that are positive. Using the asymptotic expression of $P_L(\lambda_2, n)$ there results

$$\phi(n) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left(\lambda_T \sqrt{\frac{n G''(\lambda_T)}{2}} \right), \quad (28)$$

in complete agreement with the numerical result.

7. UDV-Induced Intermittency

In this section, we will slightly modify the map introduced in Sec. 5 by changing the sign of the cubic term, which introduces a fold in the map dynamics

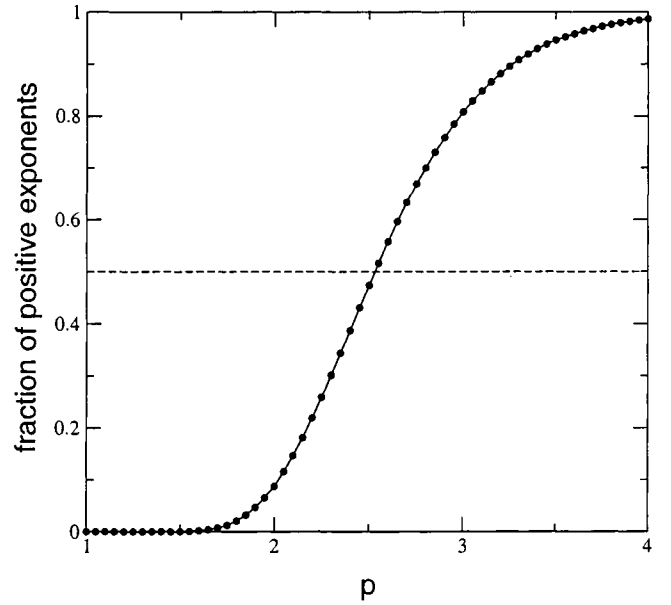


Fig. 6. Fraction of positive time-50 transversal Lyapunov exponents as a function of p , for the same parameters as in the previous figures.

along the transversal direction. This does not affect the results of the linear stability analysis, but prevents trajectories from escaping to infinity. Hence, trajectories starting off but very close to the invariant subspace $y = 0$ spend large amounts of time near $y = 0$ before being ejected away, in the form of intermittent chaotic bursts. We can call the process *UDV-induced intermittency*, since here chaotic bursting is accompanied by the lack of hyperbolicity (Sauer [2002] has called UDV an “intermittency in miniature”).

In order to describe the onset and evolution of such intermittency in the map described in Sec. 5, we consider a reference, or “true” chaotic trajectory in the invariant set $\Omega \subset \mathcal{M}$. However, the existence of the invariant subspace \mathcal{M} is jeopardized by the lack of model symmetry caused by small, yet unavoidable imperfect parameter determination, and extrinsic noise. We thus expect that a computer-generated trajectory thought to belong to \mathcal{M} will actually start off but very close to \mathcal{M} . The shadowing distance between the “true” chaotic trajectory at \mathcal{M} and the pseudo-trajectory initialized nearby is, at each instant, the pointwise distance between them in the phase plane. The existence of laminar intervals, for which the pseudo-trajectory is close to \mathcal{M} , is equivalent to having a pseudo-trajectory which continuously shadows the “true” chaotic trajectory belonging to \mathcal{M} . By the same

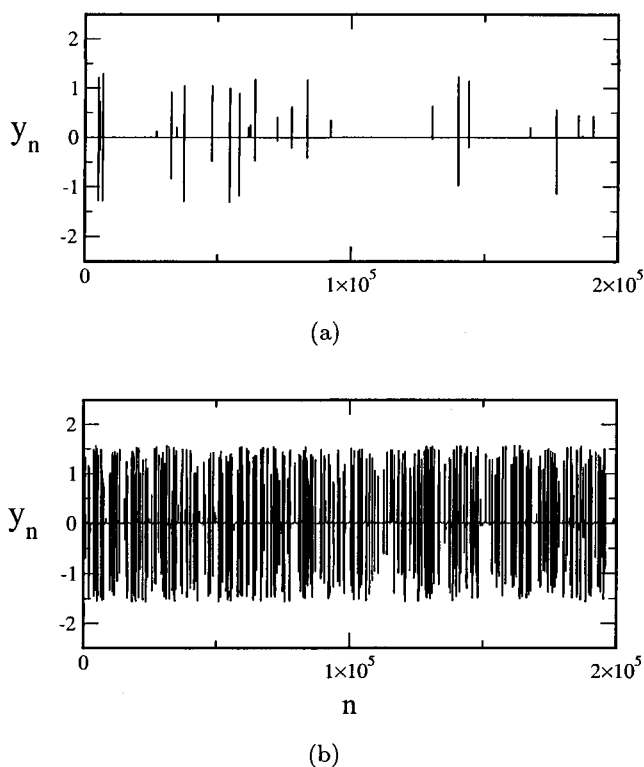


Fig. 7. Pseudo-trajectories generated for the map (14)–(15) with $a = 4.0$, $b = 5.0$, and a noise level 10^{-q} , with $q = 16$, and (a) $p = 2.30$; (b) $p = 2.55$.

token, bursting is an observable manifestation of the lack of shadowability, while the lengths of the laminar intervals yield estimates for shadowing times. Hence, the properties of chaotic bursting are related to the statistics of shadowing distances and times.

A “true” chaotic trajectory is known to exist for initial trajectories $(x_0, y_0 = 0)$ randomly chosen in Ω with respect to the Lebesgue measure. The pseudo-trajectories we generate are meant to represent numerically obtained orbits, for which we cannot have initial conditions exactly placed at $y = 0$, in that they have some uncertainty in the transversal direction. Since the x -part of the map (14) does not depend on y , the evolution along the x -direction of both trajectories is the same for all times, and the pointwise distance between a chaotic trajectory and a pseudo-trajectory will be simply the value of y_n for the latter. Finally, a computer generated pseudo-trajectory is likely to suffer the action of round-off errors, which we can simulate by corrupting a pseudo-trajectory with randomly applied kicks of small magnitude 10^{-q} , playing the role of one-step errors [Sauer, 2002].

We must emphasize that the pseudo-trajectories do not belong to Ω but, instead, to a

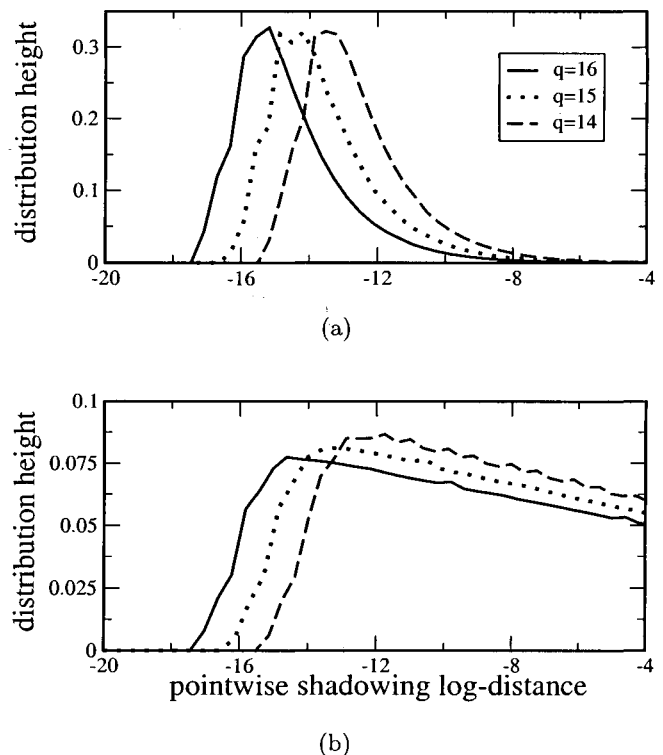


Fig. 8. Statistical distribution of pointwise shadowing log-distances for (a) $p = 2.10$, (b) $p = 2.55$, and three different noise levels.

larger invariant set of which Ω is a subset. The fold introduced in the y -part of the map (15) ensures that this larger chaotic set is recurrently close to \mathcal{M} and does not asymptote to infinity, as it would be the case if the cubic term in (15) would have a positive sign. In Fig. 7, we show two examples of high-precision pseudo-trajectories generated using the procedure described above. The noise level is fixed at 10^{-16} , which can be regarded as the computer roundoff introduced by a double precision floating-point arithmetics. Figures 7(a) and 7(b) refer to different post-critical values of the bifurcation parameter ($p > 1$). We record the values of y_n , or the pointwise shadowing distances, at each time, yielding the corresponding log-distances $z_n = \ln |y_n|$. The use of an external kick creates a “barrier” of width 10^{-q} preventing pseudo-trajectories from having shadowing log-distances less than $-q$ on average. The shadowing distances may be large due to chaotic bursting, but they are predominantly very small (within the laminar regions); the bursting being more effective as p increases.

Figure 8 presents numerically obtained statistical distributions of the shadowing log-distances z_n for two post-critical values of p and external kicks

of different magnitudes. In all depicted cases, the (normalized) distribution height falls rapidly down to zero for shadowing distances less than 10^{-q} , as expected, and decreases exponentially for higher shadowing distances

$$P_d(z) = P_{d0} \exp[-\kappa(p)(z - \ln q)], \quad (29)$$

where $P_d(z)dz$ is the probability for the shadowing log-distance to lie between z and $z + dz$. As p increases from 2.10 [Fig. 8(a)] to 2.55 [Fig. 8(b)] this decrease becomes slower, meaning that, as the UDV effect is more intense, we have a progressive dominance of higher shadowing distances. This is in accordance with the greater content of transversely unstable periodic orbits as p is increased from $p_c = 1$.

The shadowing log-distances experience spikes of various heights, but remain in the immediate vicinity of the invariant subspace \mathcal{M} , until they burst chaotically and return to \mathcal{M} . We define the shadowability time as the interval it takes for the pointwise shadowability distance to grow to the order of the attractor size, say $y = y_A = 1$. Figure 9 shows the dependence of the log-shadowing times, for different values of p , on the noisy kick strength level q . The results suggest that the distribution of the average shadowing times has a power-law scaling with respect to the noise level q , what can also be derived by integrating the distribution (29) for shadowing log-distances, in order to obtain the probability for a shadowing distance to be greater than y_A , such that $P_t(q) \sim \exp[-\kappa(p)(\ln y_A - \ln q)] = q^{\kappa(p)}$.

These probability distributions for the shadowing distances and times can be theoretically justified from the statistical properties of finite-time Lyapunov exponents. A pseudo-trajectory starting off but near the invariant subspace will wander along the x -direction according to the unstable eigenvalue of the periodic orbits embedded in Ω . As the trajectory approaches orbits with different numbers of unstable direction, it will move either toward or apart from Ω for finite time segments. Let y_k be the shadowing distance of the pseudo-trajectory at time k . During a short time interval of length n , the local expansion rate is the corresponding time- n transversal exponent, such that $y_{k+n} \sim y_k \exp(n\lambda_2(n))$. It follows that the log-shadowing distances satisfy $z_{k+n} \sim z_k + n\lambda_2(n)$.

When Ω exhibits UDV, the time- n exponents $\lambda_2(n)$ fluctuate in an irregular fashion about zero, being the random innovations which push the

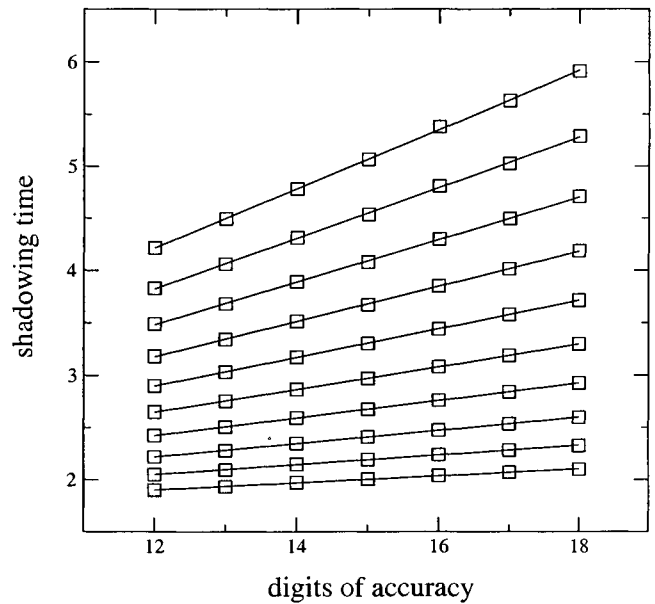


Fig. 9. Shadowing times as a function of the kick strength exponent, or the number of accuracy digits. The various lines are least-squares fits obtained for different values of the bifurcation parameter p . The top line is for $p = 2.1$ and the lines below are for values of p with a constant increment of $\delta p = 0.05$. The slopes of these lines are depicted as boxes in Fig. 10.

log-shadowing distances toward or away from the chaotic trajectory confined to the invariant subspace \mathcal{M} . The time evolution of the log-shadowing distances can thus be regarded as an additive random process, with a diffusion rate being given by the dispersion of the time- n exponents, which we have measured by the total variance σ^2 of their statistical distribution $P_L(\lambda_2(n), n)$. However, the distribution of $\lambda_2(n)$ is such that there is a different amount of positive and negative values (see Fig. 4). For example, if their average m is positive the transversal displacements of a pseudo-trajectory will have a positive average expansion rate, which describes a biased random walk, in which a drift m has been included [Sauer *et al.*, 1997].

A diffusion equation describes the spatio-temporal evolution of the distribution of the shadowing log-distances $\mathcal{P}(z, n)$ with respect to the time- n and the log-distance z (assumed to be continuous variables) [Feller, 1957]:

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z, n)}{\partial n} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}(z, n)}{\partial z^2} + m \frac{\partial \mathcal{P}(z, n)}{\partial z}. \quad (30)$$

The effect of the kicks added to the pseudo-trajectories can be included in this stochastic model

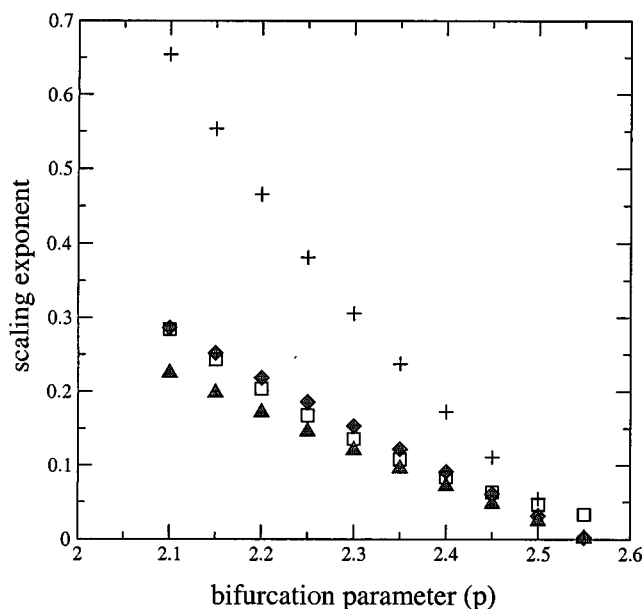


Fig. 10. Comparison between the slopes of statistical distributions of shadowing log-distances and times. The numerically obtained slopes for distributions of log-shadowing distances (crosses) are based on Fig. 9; diamonds (triangles) stand for the theoretical prediction of Eq. (31), based on time-2 (time-50) Lyapunov exponents; boxes are for numerically obtained distribution slopes of shadowing times, according to Fig. 9.

by including a reflecting barrier at $z^* \sim -q$. Moreover, we impose the following boundary conditions: $\mathcal{P}(z \rightarrow \infty) = (\partial \mathcal{P} / \partial z)_{z \rightarrow \infty} = 0$.

The diffusion process governed by Eq. (30) has an equilibrium distribution given by $(\partial \mathcal{P}_{EQ} / \partial n) = 0$, which reads [Pinto et al., 2002]

$$\mathcal{P}_{EQ}(z) = \frac{2|m|}{\sigma^2} \exp \left[-\frac{2|m|}{\sigma^2} (z - \ln q) \right], \quad (31)$$

which is similar to the numerically obtained distribution $P_d(z)$, given by Eq. (29), if we identify the decay exponent κ with the so-called *hyperbolicity exponent* [Sauer, 2002]

$$h \equiv \frac{2|m|}{\sigma^2}. \quad (32)$$

Figure 10 shows a comparison between the numerically obtained slopes of the exponentially decaying distributions (crosses) and the theoretical prediction of Eq. (32) (diamonds and triangles are for different time- n exponents). There is an increasingly better agreement among these values, as we approach $p = p^* = 2.55$, the value for which the UDV effect is more pronounced. The good agreement between theory and numerical experiment at $p = p^*$ is a consequence of the fact that, when

UDV is more intense, the average time- n exponent vanishes, such that there is an approximately equal number of positive and negative innovations acting on a pseudo-trajectory. In this case a Markovian random walk would be a better approximation of the actual behavior of the pseudo-trajectory under random kicks. As we move away from p^* , the bias caused by a nonzero average exponent makes the equilibrium distribution given by (31) a poorer version of the stochastic process. Actually the bursting is chaotic, and some degree of dynamical correlation is expected to take place at every moment, preventing us from successfully using linear stochastic models such as those considered here.

The time-2 exponent (shown as diamonds in Fig. 10) are consistently better than the time-50 ones (depicted as triangles in Fig. 10), which implies that the underlying dynamical structure causing UDV is actually very complicated. The saddles and repellers belonging to Ω are so densely intertwined that a pseudo-trajectory will have a different number of unstable directions over very short periods of time, and a time-2 exponent is expected to give results closer to a Markovian stochastic process, when compared with a time-50 exponent.

The stochastic model we use for a biased random walk with reflecting barrier can also be used to estimate the shadowing time τ , by imposing that $y_{n+\tau}$ be greater than $y_A = 1$. Using Laplace transforms, we can obtain the following theoretical estimate of the average shadowing time [Sauer et al., 1997]

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{h} (q^h - 1) - \frac{\ln q}{|m|}. \quad (33)$$

Since the statistical distribution of shadowing times scales linearly with τ , if q is small enough, Eq. (33) leads to an algebraic scaling with the noise level q , in agreement with the numerical result, provided the slope, once again, equals the hyperbolicity exponent h .

The slopes of the various curves in Fig. 9, corresponding to different values of the bifurcation parameter p , are depicted as boxes in Fig. 10. We have a better agreement between theoretical and numerical results for the shadowing times than for the log-distances. A plausible explanation for that is the different definitions we have used for shadowing distances and times. Whereas the former are precisely defined as pointwise distances between two trajectories, shadowing times, on the other hand,

are defined in a less accurate way since: (i) the times are measured when the log-distances exceed an arbitrary threshold; (ii) we compute average values over very long chaotic transients. Hence, the overall statistical behavior of shadowing times would be more likely emulated by a stochastic model.

To conclude this section, we have shown that, when a system fails to be hyperbolic due to UDV, it may present intermittent bursting if it exhibits some symmetry leading to a low-dimensional invariant subspace. This type of intermittent transition has been observed, for example, in the transition between synchronized and nonsynchronized behavior in a lattice of piecewise linear maps with a long-range coupling [Batista *et al.*, 2002]. For general systems of N coupled maps or oscillators, the invariant subspace of interest is the M -dimensional synchronization manifold (where $M \ll N$). UDV-induced intermittency in such complex systems would be explained by studying the stability of the synchronization manifold with respect to the corresponding $N - M$ transversal directions.

8. Conclusions

Unstable dimension variability (UDV) is a dynamical property of strongly nonhyperbolic invariant chaotic sets. Its consequences on the shadowability properties are severe, limiting in a dramatic way the use of single pseudo-trajectories to numerical computations of physically relevant quantities. Hence, these pseudo-trajectories can at best give the same kind of information furnished by a stochastic model, even though the governing dynamical equations are strictly deterministic. This is the reason we are calling them pseudo-deterministic systems. We reviewed previous work on UDV, which typically shows up in high-dimensional systems like coupled map or oscillator lattices, for which the invariant set of interest is the synchronization manifold. Hence UDV is far from being just a mathematical curiosity, likely to be found only in pathological dynamical systems. We thus expect severe shadowability problems in mathematical models of high-dimensional chaotic systems used in science and technology. This problem is even more pervasive if we note that most numerical integration schemes for partial differential equations rely on some kind of space and time discretization leading to such coupled systems.

This paper has focused on a simple dynamical model consisting of a two-dimensional noninvertible mapping with an invariant subspace, for two basic reasons. First, for such a system, the mathematical mechanism beneath the onset of UDV can be readily identified — a saddle-repeller bifurcation. Second, the system has a control parameter that enables us to quantify the intensity of the shadowing breakdown produced by UDV. By a combination of numerical and analytical arguments we identify the situation in which UDV is most severe: the blowout bifurcation point, where the invariant subspace loses transversal stability and half of the finite-time transversal exponents are positive. This enables us to estimate shadowing distances and times, according to a stochastic model of a biased random walk with reflecting barrier.

Acknowledgments

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: FAPESP, CNPq, Fundação Araucária (Paraná) and FUNPAR (UFPR). We acknowledge enlightening discussions and useful comments by M. Baptista, E. Barreto, Y.-C. Lai, E. Macau, T. Sauer, P. So and J. Kurths.

References

- Abarbanel, H. D. I., Brown, R. & Kennel, M. B. [1991] "Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor," *J. Nonlin. Sci.* **1**, 175–199.
- Abraham, R. & Smale, S. [1970] "Nongenericity of Ω -stability, global analysis I," *Proc. Symp. Pure Math. (AMS)* **14**, 5–8.
- Andrade, V. & Lai, Y.-C. [2001] "Super persistent chaotic transients in physical systems: Effect of noise on phase synchronization of coupled chaotic oscillators," *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**, 2607–2619.
- Anosov, D. V. [1967] "Geodesic flows and closed Riemannian manifolds with negative curvature," *Proc. Steklov Inst. Math.* **90**, 1.
- Arnold, V. I. [1978] *Ordinary Differential Equations* (The MIT Press, Cambridge, MA).
- Ashwin, P., Buescu, J. & Stewart, I. [1994] "Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators," *Phys. Lett. A* **193**, 126.
- Ashwin, P., Buescu, J. & Stewart, I. [1996] "From attractor to chaotic saddle: A tale of transverse stability," *Nonlinearity* **9**, 703–737.
- Barreto, E., So, P., Gluckman, B. J. & Schiff, S. J. [2000] "From generalized synchrony to topological decoherence: Emergent sets in coupled chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1689–1692.

- Barreto, E. & So, P. [2000] "Mechanisms for the development of unstable dimension variability and the breakdown of shadowing in coupled chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2490–2493.
- Batista, A. M., Pinto S. E. S., Viana, R. L. & Lopes, S. R. [2002] "Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling," *Phys. Rev.* **E65**, 056209.
- Benedicks, M. & Carleson, L. [1991] "The dynamics of the Hénon map," *Ann. Math.* **133**, 73–169.
- Boccaletti, S., Pecora, L. M. & Pelaez, A. [2001] "Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems," *Phys. Rev.* **E63**, 066219.
- Bonatti, S. P. da C., Diaz, L. C. & Turcat, G. [2000] "Pas de 'shadowing lemma' pour les dynamiques partiellement hyperboliques," *C. R. Acad. Sci. Paris* **330**, 587–592.
- Bowen, R. [1975] " ω -limit sets for axiom A diffeomorphisms," *J. Diff. Eq.* **18**, 333–339.
- Bulmer, M. G. [1979] *Principles of Statistics* (Dover, NY).
- Davidchack, R. & Lai, Y.-C. [2000] "Characterization of transition to chaos with multiple positive Lyapunov exponents by unstable periodic orbits," *Phys. Lett.* **A270**, 308–313.
- Dawson, S. P., Grebogi, C., Sauer, T. & Yorke, J. A. [1994] "Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1927–1930.
- Dawson, S. P. [1996] "Strange nonattracting chaotic sets, crises, and fluctuating Lyapunov exponents," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4348–4351.
- Devaney, R. L. [1989] *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Addison-Wesley, Reading).
- Ellis, R. S. [1985] *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, NY).
- Farmer, J. D., Ott, E. & Yorke, J. A. [1983] "The dimension of chaotic attractors," *Physica* **D7**, 153–180.
- Feller, W. [1957] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I (Wiley, NY).
- Grassberger, P., Badii, R. & Politi, A. [1989] "Scaling laws for invariant-measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors," *J. Stat. Phys.* **51**, 135–178.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1983a] "Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos," *Physica* **D7**, 181–200.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1983b] "Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation," *Phys. Rev. Lett.* **50**, 935–938.
- Grebogi, C., McDonald, S. W., Ott, E. & Yorke, J. A. [1985] "The exterior dimension of fat fractals," *Phys. Lett.* **A110**, 1–4.
- Grebogi, C., Hammel, S. & Yorke, J. A. [1987] "Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?" *J. Complexity* **3**, 136–145.
- Grebogi, C., Hammel, S. & Yorke, J. A. [1988a] "Numerical orbits of chaotic processes represent true orbits," *Bull. Am. Math. Soc.* **19**, 465–470.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1988b] "Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors," *Phys. Rev.* **E37**, 1711–1724.
- Grebogi, C., Hammel, S., Yorke, J. A. & Sauer, T. [1990] "Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1527–1530.
- Grebogi, C., Poon, L., Sauer, T., Yorke, J. A. & Auerbach, D. [2002] "Shadowability of chaotic dynamical systems," in *Handbook of Dynamical Systems*, ed. B. Fiedler (Elsevier, Amsterdam), Vol. 2, Chap. 7.
- Guckenheimer, J. & Holmes, P. J. [1983] *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, NY).
- Gulick, D. [1990] *Directions in Chaos* (McGraw Hill, NY).
- Jacobson, M. V. [1981] "Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps," *Commun. Math. Phys.* **81**, 39–88.
- Kantz, H., Grebogi, C., Prasad, A., Lai, Y.-C. & Sinde, E. [2002] "Unexpected robustness against noise of a class of nonhyperbolic chaotic attractors," *Phys. Rev.* **E65**, 026209.
- Katok, A. & Hasselblatt, B. [1995] *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Kostelich, E. J., Kan, I., Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1997] "Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems," *Physica* **D109**, 81–90.
- Lai, Y.-C. [1996] "Unstable dimension variability and complexity in chaotic systems," *Phys. Rev.* **E59**, R3807–R3810.
- Lai, Y.-C., Grebogi, C., Yorke, J. A. & Venkataramani, S. C. [1996] "Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems," *Phys. Rev. Lett.* **77**, 55–58.
- Lai, Y.-C., Nagai, Y. & Grebogi, C. [1997] "Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in chaotic attractors," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 649–652.
- Lai, Y.-C. & Grebogi, C. [1999] "Modeling of coupled chaotic oscillators," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4803–4806.
- Lai, Y.-C., Grebogi, C. & Kurths, J. [1999a] "Modeling of deterministic chaotic systems," *Phys. Rev.* **E59**, 2907–2910.
- Lai, Y.-C., Lerner, D., Williams, K. & Grebogi, C. [1999b] "Unstable dimension variability in coupled chaotic systems," *Phys. Rev.* **E60**, 5445–5454.
- Lai, Y.-C. & Grebogi, C. [2000a] "Obstruction to deterministic modeling of chaotic systems with invariant subspace," *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10**, 683–693.
- Lai, Y.-C. & Grebogi, C. [2000b] "Riddling in dynamical systems," *EQUADIFF 99* (World Scientific, Singapore).

- Lai, Y.-C., Liu, Z. H., Billings, L. & Schwartz, I. B. [2003] "Noise-induced unstable dimension variability and transition to chaos in random dynamical systems," *Phys. Rev.* **E67**, 026210.
- Meyer, K. & Hall, G. R. [1992] *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem* (Springer, NY).
- Palis, J. & de Melo, W. [1982] *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction* (Springer-Verlag, NY).
- Pecora, L. M. & Carroll, T. L. [1990] "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821–824.
- Pinto, S. E. S., Viana, R. L. & Grebogi, C. [2002] "Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability," *Phys. Rev.* **E66**, 046213.
- Poon, L., Dawson, S. P., Grebogi, C., Sauer, T. & Yorke, J. A. [1994] "Shadowing in chaotic systems," in *Dynamical Systems and Chaos*, eds. Aizawa, Y., Saito, S. & Shiraiwa, K. (World Scientific, Singapore), p. 13.
- Prasad, A. & Ramaswamy, R. [1999] "Characteristic distributions of finite-time Lyapunov exponents," *Phys. Rev.* **E60**, 2761.
- Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. & Dayawansa, W. P. [1992] "Controlling chaotic dynamic systems," *Physica* **D58**, 165–192.
- Ruelle, D. [1989] *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Sauer, T. & Yorke, J. A. [1991] "Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamic systems," *Nonlinearity* **4**, p. 961.
- Sauer, T., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1997] "How long do numerical chaotic solutions remain valid?" *Phys. Rev. Lett.* **79**, 59–62.
- Sauer, T. [2002] "Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems," *Phys. Rev.* **E65**, 036220.
- Viana, R. L. & Grebogi, C. [2000] "Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems," *Phys. Rev.* **E62**, 462–468.
- Viana, R. L. & Grebogi, C. [2001] "Riddled basins and unstable dimension variability in chaotic systems with and without symmetry," *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11**, 2689–2698.
- Wiggins, S. [1990] *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer-Verlag, NY).



Unstable dimension variability and codimension-one bifurcations of two-dimensional maps

Ricardo L. Viana^{a,*}, José R.R. Barbosa^{a,1}, Celso Grebogi^{b,c}

^a Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, PR, Brazil

^b Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05315-970, São Paulo, SP, Brazil

^c Institut für Physik, Universität Potsdam, D-14415 Potsdam, Germany

Received 13 August 2003; received in revised form 4 December 2003; accepted 4 December 2003

Communicated by C.R. Doering

Abstract

Unstable dimension variability is a mechanism whereby an invariant set of a dynamical system, like a chaotic attractor or a strange saddle, loses hyperbolicity in a severe way, with serious consequences on the shadowability properties of numerically generated trajectories. In dynamical systems possessing a variable parameter, this phenomenon can be triggered by the bifurcation of an unstable periodic orbit. This Letter aims at discussing the possible types of codimension-one bifurcations leading to unstable dimension variability in a two-dimensional map, presenting illustrative examples and displaying numerical evidences of this fact by computing finite-time Lyapunov exponents.

© 2004 Elsevier B.V. All rights reserved.

Hyperbolic invariant sets, like chaotic attractors or chaotic saddles, play a major role in the theory of dynamical systems, thanks to many convenient mathematical properties, such as:

- (i) The stable and unstable manifolds can be defined for each point belonging to the set [1,2];
- (ii) The set and the corresponding dynamics are structurally stable, i.e., small perturbations do not topologically alter its dynamics [3];

- (iii) Noisy trajectories of hyperbolic systems are closely followed by fiducial (noiseless) trajectories of the system for an infinite time [4,5].

Unfortunately, most dynamical systems of physical interest fail to be hyperbolic, thus limiting the applicability of hyperbolicity to only a few models, like Axiom-A systems and topological horseshoes [2].

When the decomposition of the tangent space into a stable and unstable subspace does not vary continuously along the invariant set, the dimension of the unstable manifold may be generally different for distinct points belonging to the set. This has been called unstable dimension variability (UDV), and its presence is a severe violation of the necessary conditions for a set to be hyperbolic [6]. A particularly troublesome consequence of UDV is the lack of adequate shadowability

* Corresponding author.

E-mail address: viana@fisica.ufpr.br (R.L. Viana).

¹ Permanent address: Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, PR, Brazil.

properties of noisy trajectories, such as those obtained by using computers, where the role of noise is played by unavoidable one-step roundoff and truncation errors.

If UDV is too severe, it may happen that a noisy trajectory is not closely followed by *any* fiducial trajectory of the original system for a reasonable time. Hence, the computer-generated trajectories in this case may be just numerical artifacts, and no relevant statistics can be extracted from such orbits [7]. In this case, even though the system is formally a deterministic one, the character of the orbits is, at best, of a stochastic system. Hence, they could be more properly referred to as *pseudo-deterministic systems*. In fact, when there is no shadowability at all, the mathematical model itself may be of limited use, and one should resort to experimental data (using embedding techniques, for example) to obtain relevant information about the system dynamics.

UDV was first described [6] for a diffeomorphism in the space $T^2 \times S^2$. The earliest observation of UDV for a dynamical system of physical interest was reported for the kicked double rotor map [8,9]. The presence of UDV seems to be typical in high-dimensional dynamical systems, as in coupled map lattices [10]. Besides their own importance as models of complex systems, they may also appear in numerical methods for solving partial differential equations. Low-dimensional systems, however, also may present UDV, frequently with a non-attractive invariant set, as a chaotic saddle [11]. The relation between UDV and riddled basins, as well as with on–off intermittency, in cases where there is an invariant subspace on which the chaotic set lies, has been discussed in Refs. [12] and [13], respectively.

Although the mechanism for the emergence of UDV in coupled quadratic maps has been studied [14], we still do not have a complete understanding of under what circumstances UDV appears in a dynamical system, as a parameter is varied. It seems natural, though, that this onset must be triggered by some bifurcation of a fixed point or periodic orbit, in the sense that some formerly stable eigendirection becomes unstable, augmenting the dimension of the unstable subspace by one unit. The purpose of this Letter is to enumerate the local codimension-one bifurcations which lead to UDV in two-dimensional maps [1,15]. They were found to mark the onset of

UDV for many of the dynamical systems studied so far [8,12,16]. We will restrict our analysis to maps, bearing in mind that they can also be considered as Poincaré sections or time- T stroboscopic samplings of continuous time flows.

It is convenient here to state some basic definitions for further reference. Let $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ be a d -dimensional map. The set $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ is invariant under $x \mapsto f(x)$ if, for any $x_0 \in \Lambda$, we have $f^n(x_0) \in \Lambda$ for all n . The invariant set Λ is said to be hyperbolic if the tangent space T_x associated with any point $x \in \Lambda$ can be decomposed into the direct sum $T_x = E_x^u \oplus E_x^s$, where E^u (E^s) is the unstable (stable) subspace, such that the following conditions hold [1]:

- (i) The splitting $E_x^u \oplus E_x^s$ varies continuously with $x \in \Lambda$ and is invariant insofar as $Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ and $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s$, where Df is the Jacobian derivative. In other words, one finds in Λ continuously varying bases for E_x^u and E_x^s .
- (ii) Forward (backward) iterates of points belonging to the stable (unstable) subspace are attracted to the point x as n goes to infinity, with an exponential rate ρ which is uniform for all $x \in \Lambda$. Hence, there exists $K > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $\|Df^n(x)y\| < K\rho^n\|y\|$ if $y \in E_x^s$ and $\|Df^{-n}(x)y\| < K\rho^n\|y\|$ if $y \in E_x^u$. The unstable (stable) dimension d_x^u (d_x^s) is the dimension of the invariant unstable (stable) subspace.

The structural stability of hyperbolic maps rules out any qualitative change of periodic orbits due to bifurcations or crises, for example. Since these changes are expected for most dynamical systems of physical interest, it follows that they are not typically hyperbolic [3]. Hence, we concentrate ourselves on how a given dynamical system loses hyperbolicity, and what could be the consequences for this fact. One of the consequences leads to the loss of shadowability for non-hyperbolic noisy orbits, which implies that we cannot take for granted that computer-generated orbits of non-hyperbolic systems are shadowed, or closely followed, by true orbits for an arbitrarily long time.

There are basically two mechanisms for losing hyperbolicity. The first one occurs when there are points on the invariant chaotic set Λ where the stable and unstable manifolds intersect tangentially (homoclinic tangencies). At those tangency points, the

invariant subspaces E_x^u and E_x^s are undefined. Once a given homoclinic tangency occurs at a given point, each iterate of this point under the map \mathbf{f} is also a tangency. Even in this case, it is possible to get fiducial chaotic trajectories which shadow computer-generated ones, provided we are far enough from a tangency. The time τ it takes for a noisy trajectory to reach a quasi-tangency, or “glitch”, is roughly the time-span of a shadowing trajectory. If $\varpi = \max[\varpi(t)]$ is the noise level corresponding to one-step errors, the shadowing time of a noisy-trajectory is of the order $\varpi^{-\alpha}$, where $\alpha \lesssim 1/2$ is the scaling exponent [17].

We are concerned, however, with a second and more severe way to lose hyperbolicity (UDV), by which the splitting $E_x^u \oplus E_x^s$ does not vary continuously for all points of a chaotic invariant set Λ , because the dimension of the invariant subspace takes on different values for points in Λ . For simplicity, we consider a one-parameter family of two-dimensional maps $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \rho)$, where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ and $\rho \in \mathbb{R}$. Let us assume that, for some value of the parameter, $\rho = \rho_0$, this map has a chaotic invariant set Λ with an unstable fixed point $\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \rho_0)$.

We say, without loss of generality, that Λ and the dynamics on this set present UDV if there are at least two fixed points in Λ , \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 , such that $d_1^u = \dim E^u(\mathbf{p}_1) \neq d_2^u = \dim E^u(\mathbf{p}_2)$ for $\rho = \rho_0$. In two dimensions, when $d^u = 1$ (2), \mathbf{p} is a saddle point (repeller), such that $d_2^u = d_1^u + 1$. Since every pre-iterate of both fixed points has the same unstable dimension as of \mathbf{p}_1 and \mathbf{p}_2 themselves, there are two sets of eventually fixed points in Λ of different unstable dimensions, characterizing thus UDV at ρ_0 . Let us also assume, without loss of generality, that there exists $\delta\rho_2 > \delta\rho_1 > 0$ such that in the interval $[\rho_0 - \delta\rho_1, \rho_0 + \delta\rho_2]$ we have $d_1^u = d_2^u$ if $\rho < \rho_0$ and $d_2^u = d_1^u + 1$ otherwise. The onset of UDV in this case is a codimension-one bifurcation at $\rho = \rho_0$ of an unstable fixed point embedded in Λ . It may also happen that a period- q orbit $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_q\}$ undergoes such a bifurcation. In this case, the same definitions hold, provided we use the q -times iterated map $\mathbf{f}^{[q]}(\mathbf{p}_i, \rho)$, $i = 1, 2, \dots, q$.

We now assume the following skew-symmetric form for $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (1)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n, \rho), \quad (2)$$

such that the dynamics along the x -direction is independent of that in the y -direction, thus $\varphi(x_n)$ acts as a driver signal on the transversal variable y . The Jacobian derivative of maps such as given by (1) and (2) is lower-triangular, and the eigendirections are just x and y , with eigenvalues ξ_x and ξ_y , respectively. We also assume that, in the x -direction, we have strongly chaotic dynamics, such as $\varphi(x) = 2x \pmod{1}$. This results in an invariant chaotic set Λ embedded in the two-dimensional phase space.

A particular case of importance is when $g(x, y, \rho)$ has only odd powers in y . In this case, due to the $y \rightarrow -y$ symmetry, the line $y = 0$ is an invariant subspace for the system, and the chaotic invariant set Λ is embedded in this invariant subspace. This one-dimensional subspace can be thought of as the synchronization manifold of two suitably coupled one-dimensional maps, after a suitable rotation of axes [12]. There is an infinite number of unstable periodic orbits (UPO) embedded in the chaotic set Λ . In the x -direction, all UPOs will be unstable by construction, i.e., $|\xi_x| > 1$, since the map $\varphi(x)$ is supposed to generate strongly chaotic dynamics for all values of interest of the parameter ρ . The invariant set Λ as a whole can be transversely stable or unstable, and is named a chaotic attractor or a chaotic saddle, respectively, depending on the transversal stability (along the y -direction) of the UPOs embedded in Λ : $|\xi_y| < 1$ (> 1) for the saddle (repeller), with unstable dimension $d^u = 1$ (2).

For maps of the form (1) and (2), UDV occurs as a result of a codimension-one bifurcation acting on the transversal dynamics to Λ , transforming a transversely stable UPO into an unstable one or *vice-versa*. The onset of UDV depends on the value which the eigenvalue ξ_y takes on at the bifurcation point $\rho = \rho_0$. Let $\mathbf{p} = (x = \chi, y = y^*)$ be an unstable fixed point embedded in Λ , and which undergoes such a bifurcation. When \mathbf{p} becomes a repeller, all its infinite preimages also do so. This generates a Lebesgue measure zero set of repellers embedded in the chaotic set Λ , and densely intertwined with a positive measure set of saddles. Trajectories near these newborn repellers may fall into tongues anchored at these points and be repelled away from the chaotic set (Fig. 1). After the onset of UDV, other unstable periodic orbits bifurcate likewise, increasing the number of repellers embedded in the chaotic set and turning the effect of UDV more

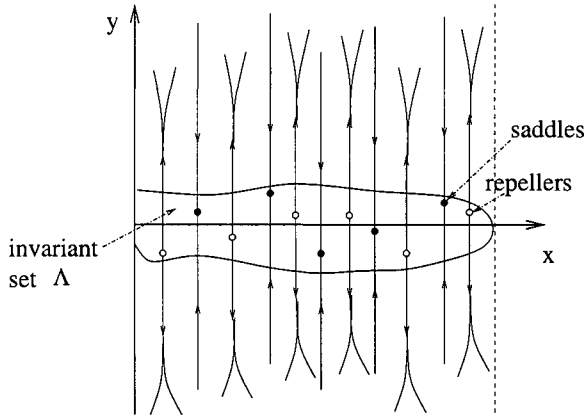


Fig. 1. Schematic view of the intertwined sets of saddles and repellers in the invariant set.

pronounced, as the bifurcation parameter is further increased [18].

A quantitative way to evaluate the local average rates of attraction or repulsion in the transversal dynamics is to compute the finite-time Lyapunov exponents in the y -direction:

$$\lambda_y(x_0, y_0; n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{\partial g(x_i, y_i, \rho)}{\partial y_i} \right|. \quad (3)$$

These exponents are typically characterized by a distribution $P(\lambda_y(n))$, such that $P(\lambda_y(n)) d\lambda_y(n)$ is the relative number of transversal time- n exponents between λ_y and $\lambda_y + d\lambda_y$ [19]. For n large enough, these distributions are Gaussian-like [20], but other distributions have been found to better fit the numerical results [21]. After the onset of UDV, it has been observed that this distribution starts to develop a positive tail, which drifts towards positive values as the UDV is more pronounced [9]. When UDV is the most intense, half of the finite-time transversal exponents are positive, meaning equal contributions of repellers and saddles, such that the average time- n exponent

$$\langle \lambda_y(n) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_y(n) P(\lambda_y(n)) d\lambda_y(n)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(\lambda_y(n)) d\lambda_y(n)} \quad (4)$$

vanishes [18]. In this case, it follows that the infinite-time exponent in the transversal direction, $\lambda_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_y(n)$, also vanishes, and the chaotic set Λ loses transversal stability through a blowout bifurcation [22].

The relation between unstable dimension variability and loss of transversal stability can be fully appreciated in the context of the contribution that unstable periodic orbits have on the natural measure of the chaotic invariant set Λ . To compute the infinite-time exponent λ_T , we use typical trajectories on Λ , with respect to its natural measure $m(\Lambda)$. Since there are an infinite number of unstable periodic orbits embedded in Λ , they are the support of the measure in the sense that, when computing λ_T , such orbits contribute with different weights. These weights, on the other hand, are determined by the magnitude of the unstable eigenvalues of those unstable orbits; such that, the larger is the unstable eigenvalue of the periodic orbit, the smaller is its weight, or contribution to the natural measure. Summing over all unstable period- q orbits embedded in Λ gives then its natural measure [23]

$$m(\Lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{p}_q(j) \in \Lambda} \frac{1}{L_u(\mathbf{p}_q(j))}, \quad (5)$$

where $\mathbf{p}_q(j)$ is the j th fixed point of $\mathbf{f}^q(\mathbf{p})$, i.e., $\mathbf{p}_q(j)$ is on a period- r orbit, where r is equal to q or a prime factor of q , and L_u is the expanding eigenvalue of this orbit.

The natural measure associated with the j th period- q orbit is the normalized ratio [18]

$$m_q(j) = \frac{1/L_u(\mathbf{p}_q(j), q)}{\sum_{\ell=1}^{N_q} [1/L_u(\mathbf{p}_q(\ell))]}, \quad (6)$$

where N_q is the number of period- q orbits. N_q^s and N_q^u are the numbers of transversely stable and unstable period- q orbits, respectively, such that $N_q^s + N_q^u = N_q$. For two-dimensional maps ($q = 1$), N_1^s and N_1^u are the number of saddles and repellers, respectively. The weights of the transversely stable and unstable period- q orbits are given, respectively, by

$$w_q^s = \sum_{j=1}^{N_q^s} m_q(j) \lambda_2(\mathbf{p}_q(j), q) \quad (\text{for } \lambda_y(\mathbf{p}_q(j), q) < 0), \quad (7)$$

$$w_q^u = \sum_{j=1}^{N_q^u} m_q(j) \lambda_y(\mathbf{p}_q(j), q) \quad (\text{for } \lambda_y(\mathbf{p}_q(j), q) > 0), \quad (8)$$

where $\lambda_y(\mathbf{p}_q(j), q)$ is time- q transversal Lyapunov exponent for the j th period- q orbit. If $\lambda_y(\mathbf{p}_q(j), q)$

is positive (negative) the periodic orbit is transversely unstable (stable).

Based on these arguments, we can assign the onset of unstable dimension variability of the invariant set Λ to the parameter value ρ for which the first periodic orbit embedded in Λ loses transversal stability. As ρ increases past this critical value, more and more unstable orbits lose transversal stability, and the repellers weight increases with respect to the saddles weight. When $\lambda_T = 0$ the contributions of the saddles and repellers become exactly counterbalanced, and unstable dimension variability is expected to be most intense. At this point, the set Λ loses transversal stability as a whole. As the parameter ρ is further increased, the repellers weight becomes larger than the saddles weight.

The possible types of codimension-one bifurcations of two-dimensional maps can be described, using the center manifold theory, by the normal forms along the transversal direction computed at $\mathbf{p} = (\chi, y^*)$, and written as $z \mapsto g(z, \mu)$, where $z \equiv y - y^*$ and $\mu = \rho - \rho_0$. Hence $g(0, 0) = 0$, by construction. In the following, we treat the possible cases according to the corresponding bifurcation eigenvalue.

Bifurcations with eigenvalue +1

In this case $\partial g(z, \mu)/\partial z = 1$ at the bifurcation point $(0, 0)$, for which there are three possibilities.

Pitchfork bifurcation

The normal form describing the dynamics transversal to Λ , at $x = \chi$, is [15]

$$g(z, \mu) = z + \mu z \mp z^3, \quad (9)$$

where the minus sign in the cubic term refers to the supercritical pitchfork bifurcation. There is an invariant subspace at $y = z = 0$, where the chaotic invariant set Λ lies. For $\mu < 0$ the fixed point of the map (9) at $y = 0$ is transversely stable (a saddle), and the onset of UDV is caused by its conversion into a transversely unstable point (a repeller), with the consequent appearance of two saddles outside the chaotic invariant set Λ . The plus sign in (9) is for the sub-critical pitchfork bifurcation, where two repellers outside Λ approach the saddle at $z = 0$ as μ tends to 0 and eventually coalesce there, making the former saddle to become a repeller, as well all its preimages.

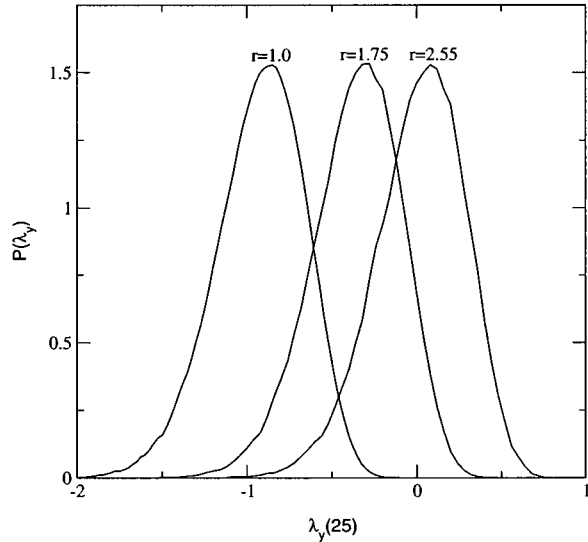


Fig. 2. Distribution of the transversal time-25 Lyapunov exponent for the map (11) and (12) with $a = 4$, $b = 5$, and three values of the bifurcation parameter r .

In both cases the bifurcation diagram presents two curves of fixed points passing through the bifurcation point $(0, 0)$: one curve (the straight line) exists on both sides of the $\mu = 0$ line, whereas the other one lies locally just in one side. Accordingly, the additional conditions for a pitchfork bifurcation to occur at $(0, 0)$ are [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} &= 0, & \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2} \Big|_{(0,0)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z \partial \mu} \Big|_{(0,0)} &\neq 0, & \frac{\partial^3 g(z, \mu)}{\partial z^3} \Big|_{(0,0)} &\neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

The sub-critical pitchfork bifurcation is the mechanism whereby UDV occurs in the riddling map [12, 24]:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = ax_n(1 - x_n), \quad x \in [0, 1], \quad (11)$$

$$y_{n+1} = re^{-b(x_n - \chi)^2} y_n + y_n^3, \quad (12)$$

where a is chosen so that the dynamics is chaotic in the invariant subspace $y = 0$, $\chi = 1 - (1/a) = 0.75$ is an unstable fixed point embedded in Λ , and $b > 0$ is kept fixed. For $x = \chi$, Eq. (12) reduces to the normal form (9) when $\mu = r - 1$. The onset of UDV occurs at $r = 1$ and, as r increases past this value, the distributions of the transversal finite-time Lyapunov exponent (Fig. 2)

drift toward positive values of λ_y . Note also that the chaotic attractor at $y = 0$ loses transversal stability as a whole at $r^* \approx 2.55$, or a *blowout instability* [25]. We remark that, after the occurrence of UDV, the invariant set is a chaotic saddle.

Transcritical bifurcation

The normal form for the transversal dynamics at the bifurcation point $(0, 0)$ is now

$$g(z, \mu) = z + \mu z \mp z^2. \quad (13)$$

Due to the quadratic term in z , although the $y = 0$ line continues to be an invariant subspace, the chaotic set is not necessarily embedded in it. For $\mu < 0$ (> 0) the fixed point at $z = 0$ is stable (unstable), whereas the other fixed point at $z \neq 0$ is unstable (stable) when $\mu < 0$ (> 0). The minus (plus) sign in (13) refers to a supercritical (sub-critical) bifurcation at $\mu = 0$.

In the bifurcation diagram, or the z - μ plane, there are two curves of fixed points passing through the origin and existing in both sides of the $\mu = 0$ line. Hence, besides the usual conditions $g(0, 0) = 0$ and $\partial g / \partial z(0, 0) = 1$, the following conditions must hold:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} &= 0, & \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2} \Big|_{(0,0)} &\neq 0, \\ \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z \partial \mu} \Big|_{(0,0)} &\neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

An example of this kind of transition is the following two-dimensional map on the topological cylinder $S^1 \times \mathbb{R}^1$

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad x \in [0, 2\pi), \quad (15)$$

$$y_{n+1} = (y_n + \mu y_n - y_n^2) \cos x_n, \quad (16)$$

where $\chi = 0$ is the unstable fixed point embedded in the circle $y = 0$. The y -map (16) reduces to the normal form (13) when $x = \chi$, $(0, 0)$ being the bifurcation point. The onset of UDV at $\mu = 0$ can be seen in the distributions of the time-15 transversal exponent (Fig. 3). Note also that the chaotic attractor loses transversal stability at $\mu \approx 1.0$.

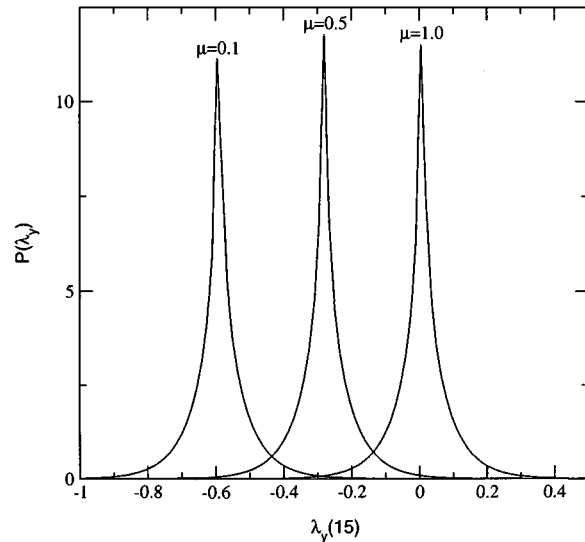


Fig. 3. Distributions of the transversal time-15 Lyapunov exponent for the map (15) and (16) and three values of the bifurcation parameter μ .

Saddle-node bifurcation

The transversal dynamics at the bifurcation point $(0, 0)$ is governed in this case by the normal form

$$g(z, \mu) = z + \mu \mp z^2. \quad (17)$$

For $\mu < 0$ (> 0) there is no fixed point at all and, at $\mu = 0$, a pair of fixed points, one stable and one unstable, appear for $\mu > 0$ (< 0). In the z - μ plane, there is a single curve of fixed points passing through the bifurcation point, which locally lies in the right (the minus sign in (17)) or in the left (the plus sign in (17)) side of the $z = 0$ axis. In either case, the additional conditions for a saddle-node bifurcation are

$$\frac{\partial g(z, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(z, \mu)}{\partial z^2} \Big|_{(0,0)} \neq 0. \quad (18)$$

In the saddle-node case, however, it must be observed that UDV occurs rigorously only at the bifurcation point, since before (minus sign) or after (plus sign) this point there is no fixed point (one can say that it is an atypical case of UDV). Accordingly, this scenario was ruled out for the appearance of bubbling, since the bifurcation parameter μ is supposed not to alter the dynamics along the invariant set [26]. When the fixed point $y = y^*$ disappears as a result of a saddle-node bifurcation, the invariant set becomes punctured

in a fine scale, with the size of the holes being proportional to μ , and without necessarily a change in the unstable dimension. An example of this case was studied in Ref. [16], where a modified version of the Kaplan–Yorke map was considered. Another example is the non-symmetric version of the riddling map (11) and (12), where a symmetry breaking parameter was added to the transversal map [12].

Bifurcations with eigenvalue -1

The case $(\partial g(z, \mu/\partial z))_{0,0} = -1$ characterizes a *period-doubling bifurcation*, for which the second iterate of the map, $g^{[2]}(z, \mu)$, must undergo a pitchfork bifurcation at the bifurcation point $(0, 0)$. A common choice for the normal form for the transversal dynamics is [15]

$$g(z, \mu) = -z - \mu z + z^3. \quad (19)$$

At $\mu = 0$ the stable fixed point ($z = 0$) becomes unstable and a stable period-2 orbit emerges out. The conditions for this bifurcation to occur are thus

$$g(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial g(z, \mu)}{\partial z} \right|_{(0,0)} = -1, \quad \left. \frac{\partial g^{[2]}(z, \mu)}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g^{[2]}(z, \mu)}{\partial z^2} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 g^{[2]}(z, \mu)}{\partial z \partial \mu} \right|_{(0,0)} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial^3 g^{[2]}(z, \mu)}{\partial z^3} \right|_{(0,0)} \neq 0. \quad (21)$$

Like in the pitchfork bifurcation, this case is also characterized by a symmetric normal form in the transversal direction, and $y = 0$ is an invariant subspace containing the chaotic set Λ . An example in $S^1 \times \mathbb{R}^1$ is

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad x \in [0, 1], \quad (22)$$

$$y_{n+1} = (-y_n - \mu y_n + y_n^3) \cos x_n, \quad (23)$$

with $(x = 0, y = 0)$ as the embedded unstable fixed point which loses transversal stability at the onset of UDV, occurring at $\mu = 0$. This is confirmed by the statistics of transversal time- n exponents, the resulting distributions being almost identical to those depicted

in Fig. 3. The blowout bifurcation, which signals the loss of the transversal stability of Λ , occurs at $\mu \approx 1$.

In conclusion, we have presented in this Letter the possible scenarios for the onset of UDV in two-dimensional maps, when it occurs due to a codimension-one bifurcation of a fixed point or, possibly, a periodic orbit. We present examples of all the corresponding bifurcation types, classified according to the nature and the sign of the corresponding eigenvalues. The occurrence of UDV, in the examples given, can also be numerically reflected by the fluctuating behavior about zero of the transversal finite-time Lyapunov exponent. Our investigation was restricted to codimension-one bifurcation of maps, but similar bifurcations for vector fields present an analogous classification, *mutatis mutandis*. Bifurcations of higher codimension may also cause the onset of UDV, especially in complex systems, like coupled maps or oscillator lattices, where this fact has already been numerically established [10]. Further research is thus needed to provide a more comprehensive classification of the possible scenarios for the onset of unstable dimension variability.

Acknowledgements

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: CNPq, FAPESP, and Humboldt Foundation (Germany). We acknowledge enlightening discussions and useful comments by S.R. Lopes, A.M. Batista, and S.E. de S. Pinto.

References

- [1] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [3] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] D.V. Anosov, *Proc. Steklov Inst. Math.* 90 (1967) 1.
- [5] R. Bowen, *J. Differential Equations* 18 (1975) 333.
- [6] R. Abraham, S. Smale, *Proc. Sympos. Pure Math. (AMS)* 14 (1970) 5.
- [7] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. Kurths, *Phys. Rev. E* 59 (1999) 2907;

- T.D. Sauer, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 036220.
- [8] F.J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, W.P. Dayawansa, *Physica D* 58 (1992) 165.
- [9] S.P. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 1927.
- [10] Y.-C. Lai, D. Lerner, K. Williams, C. Grebogi, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 5445.
- [11] S.P. Dawson, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 4348.
- [12] R.L. Viana, C. Grebogi, *Int. J. Bifur. Chaos* 11 (2001) 2689.
- [13] R.L. Viana, S.E. de S. Pinto, C. Grebogi, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 046213.
- [14] E. Barreto, P. So, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 2490.
- [15] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [16] R.L. Viana, C. Grebogi, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 462.
- [17] C. Grebogi, S. Hammel, J.A. Yorke, T. Sauer, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1527.
- [18] Y.-C. Lai, C. Grebogi, *Int. J. Bifur. Chaos* 10 (2000) 683.
- [19] E.J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Physica D* 109 (1997) 81.
- [20] H. Fujisaka, *Prog. Theor. Phys.* 79 (1983) 1264.
- [21] C. Anteneodo, S.E. de S. Pinto, A.M. Batista, R.L. Viana, *Phys. Rev. E* 68 (2003) 045202(R).
- [22] P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, *Phys. Lett. A* 193 (1994) 126; P. Ashwin, J. Buescu, I. Stewart, *Nonlinearity* 9 (1996) 703.
- [23] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Phys. Rev. E* 37 (1988) 1711.
- [24] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J.A. Yorke, S.C. Venkataramani, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 55.
- [25] Y. Nagai, Y.-C. Lai, *Phys. Rev. E* 55 (1997) R1251.
- [26] A. Zimin, B. Hunt, E. Ott, *Phys. Rev. E* 67 (2003) 016204.